Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 18 dicembre 2015

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{senh}(x)} dx \,.$$

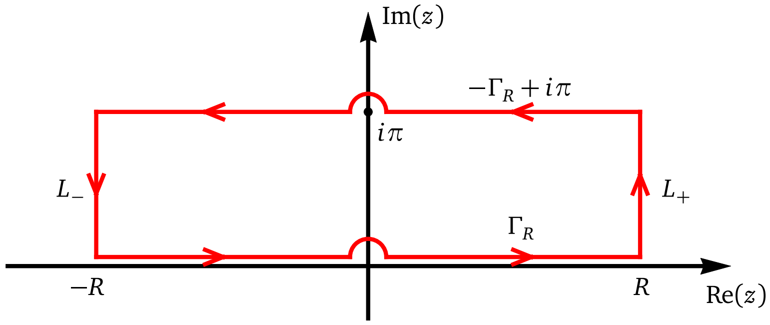
Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha singolarità $z_k = i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di tutti poli semplici ad eccezione di $z_0 = 0$ che è una singolarità eliminabile, infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{senh}(x)} = 1 \,.$$

Il percorso di integrazione può essere deformato con continuità ($z = 0$ è una singolarità eliminabile) da $(-\infty, \infty)$ a $\Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup \gamma_\epsilon^- \cup [\epsilon, \infty)$, con $\gamma_\epsilon^- = \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$, la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio ϵ, immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive (si veda la figura).
Riscriviamo l'integrale come

$$T = \frac{1}{i}\left(\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{e^z - e^{-z}} dz - \int_\Gamma \frac{e^{-iz}}{e^z - e^{-z}} dz\right) = -i\left(T_+ - T_-\right) \,.$$



Consideriamo il percorso chiuso mostrato in figura $\gamma_R = \Gamma_R \cup L_+ \cup (-\Gamma_R + i\pi) \cup L_-$ e gli integrali

$$\oint_{\gamma_R} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}}, i\pi\right] = -i\pi\, e^{\mp\pi} \,.$$

Nel limite $R \to \infty$ ($\Gamma_R \to \Gamma$), si ha

$$\begin{aligned}
-i\pi e^{\mp\pi} &= T_\pm - e^{\mp\pi} \int_\Gamma \frac{e^{\pm iz}}{-e^z + e^{-z}} dz + \lim_{R\to\infty}\left[\int_{L_-} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz + \int_{L_+} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz\right] \\
&= T_\pm\left(1 + e^{\mp\pi}\right) + \lim_{R\to\infty}\left[\int_{L_-} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz + \int_{L_+} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz\right] \,.
\end{aligned}$$

Dimostriamo che i valori limite degli integrali sui tratti verticali sono nulli. Usiamo la sostituzione $z = \pm R + iy$ con $y \in [0, \pi]$, e la disuguaglianza di Darboux

$$\left| \int_{L_\pm} \frac{e^{\pm iz}}{e^z - e^{-z}} dz \right| \le \int_0^\pi \frac{e^{\mp y}}{|e^z - e^{-z}|} dy \le \int_0^\pi \frac{e^{\mp y}}{\left| e^R - e^{-R} \right|} dy = \mp \frac{e^{\mp\pi} - 1}{\left| e^R - e^{-R} \right|} = \left| \frac{e^{\mp\pi} - 1}{e^R - e^{-R}} \right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \,.$$

Ne consegue che

$$T_\pm = \frac{-i\pi e^{\mp\pi}}{1 + e^{\mp\pi}} \,,$$

quindi l'integrale completo

$$T = -i\left(T_+ - T_-\right) = -\pi\left(\frac{e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} - \frac{e^\pi}{1 + e^\pi}\right) = -\pi\frac{1 - e^\pi}{1 + e^\pi} - \pi\left(\frac{1}{1 + e^\pi} - \frac{e^\pi}{1 + e^\pi}\right) = -\pi\frac{1 - e^\pi}{1 + e^\pi}$$

$$T = -\pi\frac{e^{-\pi/2} - e^{\pi/2}}{e^{-\pi/2} + e^{\pi/2}} \,,$$

da cui il risultato finale

$$T = \pi \tanh(\pi/2) \,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Sfruttando il teorema dei residui, si calcoli la somma della serie numerica

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + (1 + 2k)^2\right]^2} \,.$$

Soluzione del secondo problema

La serie può essere scritta estendendo la somma $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Con la sostituzione $k' = -k - 1$ si ha

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + (1 + 2k)^2\right]^2} = \sum_{k'=-\infty}^{-1} \frac{1}{\left[1 + (-2k' - 1)^2\right]^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + (1 + 2k)^2\right]^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k + 1) \,,$$

con

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2} \,.$$

La serie è quindi scrivibile come la somma dei residui di una funzione $F(z) = f(z)g(z)$, dove $g(z)$ è una funzione che abbia, come singolarità, i soli poli semplici dell'insieme $\{z_k = 2k + 1\}_{k\in\mathbb{Z}}$, tutti con residui unitari. A tal fine possiamo scegliere

$$g(z) = N\, \tan(z\pi/2) \,,$$

con N costante di normalizzazione da definire richiedendo che i residui siano uguali ad uno. La tangente ha poli semplici nei multipli dispari di $\pi/2$, quindi, come richiesto, $g(z)$ ha poli semplici in $z_k = 2k + 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[N\, \tan(z\pi/2), z_k\right] = N \lim_{z\to z_k} \tan(z\pi/2)(z - z_k) = N \lim_{z\to z_k} \frac{\operatorname{sen}(z_k\pi/2)}{(-\pi/2)\sin(z_k\pi/2)} = -N\frac{2}{\pi} \,,$$

ne consegue che $N=-\pi/2$ e

$$g(z)=-\frac{\pi}{2}\tan(z\pi/2)\,.$$

Sia C_n la circonferenza centrata nell'origine di raggio $R_n=2(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, essa contiene gli $(2n+1)$ poli z_k, con $k=-n,-n+1,\ldots,0,\ldots,n-1,n$. L'integrale su C_n è pari alla somma dei residui

$$\oint_{C_n}F(z)dz=-\frac{\pi}{2}\oint_{C_n}\frac{\tan(z\pi/2)}{(1+z^2)^2}dz=2i\pi\left\{\sum_{|k|\le n}\text{Res}\left[F(z),z_k\right]+\text{Res}\left[F(z),+i\right]+\text{Res}\left[F(z),-i\right]\right\},$$

gli ultimi due sono i residui dovuti ai poli doppi in $z_\pm=\pm i$ della funzione $f(z)$ e sono

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F(z),\pm i\right]=-\frac{\pi}{2}\frac{d}{dz}\frac{\tan(z\pi/2)}{(z\pm i)^2}\bigg|_{z=\pm i}&=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi/2}{\cos^2(i\pi/2)(\pm 2i)^2}-2\frac{\tan(\pm i\pi/2)}{(\pm 2i)^3}\right)\\&=-\frac{\pi}{16}\left(\frac{-\pi}{\cosh^2(\pi/2)}+2\tanh(\pi/2)\right),\end{aligned}$$

quindi la somma è:

$$\text{Res}\left[F(z),+i\right]+\text{Res}\left[F(z),-i\right]=-\frac{\pi}{8}\left(\frac{-\pi}{\cosh^2(\pi/2)}+2\tanh(\pi/2)\right).$$

I residui nei poli z_k sono, per costruzione, i termini della serie, cioè

$$\text{Res}\left[F(z),z_k\right]=\frac{1}{\left[1+(1+2k)^2\right]^2}\,.$$

Poiché nel limite $n\to\infty$, ovvero al divergere del raggio di C_n, l'integrale si annulla per il primo lemma d'integrazione sugli archi infiniti, la serie ha somma pari a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[1+(2k+1)^2\right]^2}=\frac{1}{2}\sum_k\text{Res}\left[f(z)g(z),z_k\right]&=-\frac{1}{2}\left\{\text{Res}\left[f(z)g(z),+i\right]+\text{Res}\left[f(z)g(z),-i\right]\right\}\\&=-\frac{\pi}{16}\left(\frac{\pi}{\cosh^2(\pi/2)}-2\tanh(\pi/2)\right)\\&=-\frac{\pi}{16}\frac{1}{\cosh^2(\pi/2)}\left[\pi-2\sinh(\pi/2)\cosh(\pi/2)\right]\\\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[1+(2k+1)^2\right]^2}&=-\frac{\pi}{16}\frac{1}{\cosh^2(\pi/2)}\left[\pi-\sinh(\pi)\right].\end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Sia

$$R_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(k+1)+1+(-1)^k\right]z^k$$

la rappresentazione in serie di potenze di una funzione $f(z)$. Si determini il dominio di convergenza D_0 della rappresentazione data. Si faccia il prolungamento analitico in $D_1=\{z:z\neq\pm1\}$ e lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z=1$.

Soluzione del terzo problema

Il raggio di convergenza della serie iniziale, r, si ottiene con la formula di Cauchy Hadamard, si ha

$$r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1\,,$$

con $a_k = k(k+1)+1+(-1)^k$. Ne consegue che, essendo l'origine il centro dello sviluppo, $D_0 = \{z : |z| < 1\}$.
La serie può essere scritta come la somma di tre termini

$$\begin{aligned}
R_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \\
&= z\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)z^{k-1} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \\
&= z\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} + \frac{2}{(1-z)(1+z)} \\
&= z\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{k} + \frac{2}{(1-z)(1+z)} \\
&= z\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z} + \frac{2}{(1-z)(1+z)} \\
&= \frac{2z}{(1-z)^3} + \frac{2}{(1-z)(1+z)}\,.
\end{aligned}$$

Si ottiene così la funzione nella forma analitica

$$f(z) = \frac{2z}{(1-z)^3} + \frac{2}{(1-z)(1+z)}\,.$$

Le singolarità sono: un polo semplice in $z=-1$ ed un polo triplo in $z=1$.
La serie di Laurent in $z=1$ si ottiene partendo dalla forma

$$f(z) = \frac{2z}{(1-z)^3} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\,.$$

Sottraiamo e sommiamo 2 a numeratore del primo termine al fine di avere polinomi in $(z-1)$

$$f(z) = \frac{2(z-1)}{(1-z)^3} + \frac{2}{(1-z)^3} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = \frac{-2}{(z-1)^3} + \frac{-2}{(z-1)^2} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{1+z}\,,$$

i primi tre termini rappresentano la parte principale, la parte regolare si ottiene dallo sviluppo in serie di Taylor del quarto termine. Si sfrutta la serie geometrica, poiché la corona di convergenza è $0 < |z-1| < 2$, quindi $|z-1|/2 < 1$, cerchiamo una serie con ragione $(z-1)/2$, si ha

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1/2}{1+(z-1)/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^{k+1}}\,.$$

In definitiva

$$f(z) = \frac{-2}{(z-1)^3} + \frac{-2}{(z-1)^2} + \frac{-1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{-2}{(z-1)^3} + \frac{-2}{(z-1)^2} + \sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^{k+1}}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si trovino autovalori e autovettori della matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si calcoli, infine, il determinante

$$\det\left(e^{E}\right) ,$$

senza far uso dei valori numerici degli autovalori.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Il determinante è una quantità invariante cosí come la traccia. Indicando con E_d la forma diagonale di E, che è $E_d = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, λ_k, $k = 1, 2, 3$, è il k-esimo autovalore, abbiamo

$$\det\left(e^{E}\right) = \det\left(e^{E_d}\right) = e^{\lambda_1}\, e^{\lambda_2}\, e^{\lambda_3} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = e^{\mathrm{Tr}(E_d)} = e^{\mathrm{Tr}(E)} = e^{0} = 1\,.$$

L'equazione secolare è

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2+\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = 0\,,$$

da cui si hanno gli autovalori

$$\lambda_1 = -2\,, \qquad \lambda_2 = -1\,, \qquad \lambda_3 = 3\,.$$

Gli autovettori, normalizzati ad uno, corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Si sfrutti quanto ottenuto per verificare l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(k)}{k^2} dk = \pi\,.$$

Soluzione del quinto problema

La trasformata di Fourier è

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k} .$$

Usando L'identità di Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk ,$$

si ha, per il primo integrale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 ,$$

mentre il secondo è quello che si vuole calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k^2} dk .$$

Si ottiene quindi l'identità cercata

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k^2} dk = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k^2} dk = \pi .$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si stabilisca quali, dei quattro operatori

$$\hat{O}_1 = \hat{D}_x + ix , \qquad \hat{O}_2 = ix\hat{D}_x , \qquad \hat{O}_3 = i\hat{D}_x^3 , \qquad \hat{O}_4 = i\hat{D}_x - x^2 , \qquad \text{con: } \hat{D}_x = \frac{d}{dx} ,$$

sono hermitiani nello spazio $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione del sesto Problema

Per verificare l'hermitianità di un operatore $\hat{O}$ proviamo che, $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(g, \hat{O}f)^* = (f, \hat{Q}g) .$$

Ricordiamo, inoltre, che la variabile x è reale, le funzione sono in generale complesse e, in quanto a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$, tali che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0 .$$

Consideriamo caso per caso. Nel primo, integrando per parti quando possibile, si ha

$$\begin{aligned}
(g, \hat{O}_1 f)^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \hat{O}_1 f(x) dx \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \Big(f'(x) + ixf(x) \Big) dx \right)^* \\
&= \left(\underbrace{g^*(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \Big(-g'^*(x) f(x) + ixg^*(x) f(x) \Big) dx \right)^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(-f^*(x) g'(x) - ixf^*(x) g(x) \Big) dx = \left(f, \left[-\hat{D}_x - ix\right] g\right) = -\left(f, \hat{O}_1 g\right) ,
\end{aligned}$$

$\hat{O}_1$ è antihermitiano.
Nel secondo caso

$$
\begin{aligned}
(g,\hat{O}_2 f)^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\hat{O}_2 f(x)dx\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} ixg^*(x)f'(x)dx\right)^* \\
&= \left(\underbrace{ixg^*(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\int_{-\infty}^{\infty}\Big(g^*(x)f(x)+xg'^*(x)f(x)\Big)dx\right)^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} i\Big(f^*(x)g(x)+xf^*(x)g'(x)\Big)dx = \left(f,\left[i+x\hat{D}_x\right]g\right) \neq \Big(f,\hat{O}_2 g\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

$\hat{O}_2$ non è né hermitiano né antihermitiano.
Nel terzo caso

$$
\begin{aligned}
(g,\hat{O}_3 f)^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\hat{O}_3 f(x)dx\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} ig^*(x)f'''(x)dx\right)^* \\
&= \left(\underbrace{ig^*(x)f''(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\int_{-\infty}^{\infty} g'^*(x)f''(x)dx\right)^* = \left(\underbrace{-ig'^*(x)f'(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\int_{-\infty}^{\infty} g''^*(x)f'(x)dx\right)^* \\
&= \left(\underbrace{ig''^*(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\int_{-\infty}^{\infty} g'''^*(x)f(x)dx\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} if^*(x)g'''(x)dx = \Big(f,iD_x^3 g\Big) = \Big(f,\hat{O}_3 g\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

$\hat{O}_3$ è hermitiano.
Infine, per $\hat{O}_4$ si ha

$$
\begin{aligned}
(g,\hat{O}_4 f)^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\hat{O}_4 f(x)dx\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\Big(if'(x)-x^2 f(x)\Big)dx\right)^* \\
&= \left(\underbrace{ig^*(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ig'^*(x)f(x)-x^2 g^*(x)f(x)\Big)dx\right)^* = \Big(f,\left[iD_x - x^2\right]g\Big) = \Big(f,\hat{O}_4 g\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

anche $\hat{O}_4$ è hermitiano.