Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 18 aprile 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{a^2+b^2-2ab\cos(\beta)} d\beta \,,$$

con a e b reali positivi e tali che: $0 < a < b$.

Soluzione del primo problema

Con la sostituzione $z = e^{i\beta}$, da cui $d\beta = -i dz/z$, si ha

$$B = \frac{i}{4} \oint_{|z|=1} \frac{(z-1/z)^2}{a^2+b^2-ab\,(z+1/z)} \frac{dz}{z} = -\frac{i}{4} \oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left[z^2ab - z\,(a^2+b^2)+ab\right]} dz \,.$$

L'integranda è una funzione meromorfa che un polo doppi nell'origine e due poli semplici in

$$z_{1,2} = \frac{a^2+b^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2+b^2 \pm \left(a^2-b^2\right)}{2ab} = \begin{cases} a/b \\ b/a \end{cases} .$$

Dalla condizione iniziale si hanno le diseguaglianze

$$z_1 = a/b < 1\,, \qquad z_2 = b/a > 1\,,$$

da cui si ha che solo z_1 è interno al cerchio unitario. Usando il teorema dei residui

$$B = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{Res}\left[f(z),0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z),0\right]\right) ,$$

dove si è posto

$$f(z) = \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left[z^2ab - z\,(a^2+b^2)+ab\right]} \,.$$

Il residuo nell'origina vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[f(z),0\right] &= \left.\frac{d}{dz} z^2 f(z)\right|_{z=0} \\
&= \left.\frac{4z(z^2-1)ab\,(z-a/b)\,(z-b/a) - \left(2zab-a^2-b^2\right)\left(z^2-1\right)^2}{a^2b^2\,(z-a/b)^2\,(z-b/a)^2}\right|_{z=0} \\
&= 1/a^2 + 1/b^2 \,.
\end{aligned}$$

Mentre per il residuo in $z_1 = a/b$ si ha

$$\operatorname{Res}[f(z), a/b] = \frac{\left(a^2/b^2 - 1\right)^2}{(a/b - b/a)\, a^3/b} = \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2/b^4}{(a^2 - b^2)\, a^2/b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} = 1/b^2 - 1/a^2 .$$

Il risultato finale è

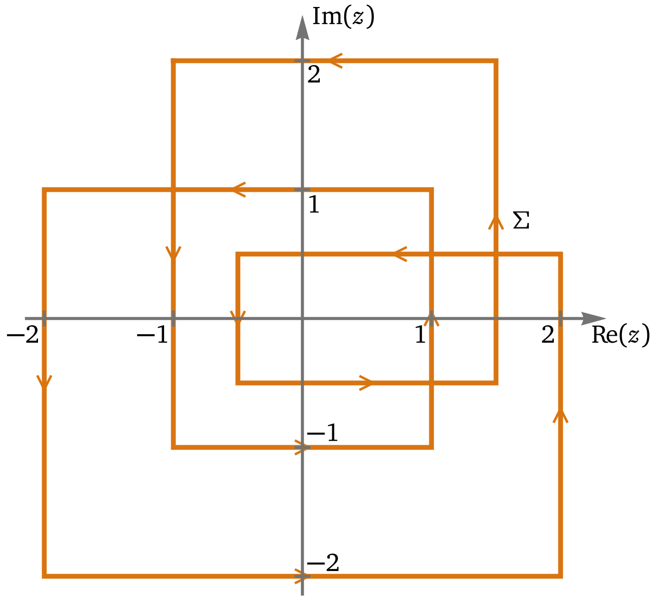
$$B = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 0]\right) = \frac{\pi}{b^2} .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \oint_\Sigma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2(z^2+2)} dz ,$$

dove Σ è percorso formato dalla spezzata chiusa mostrata in figura.

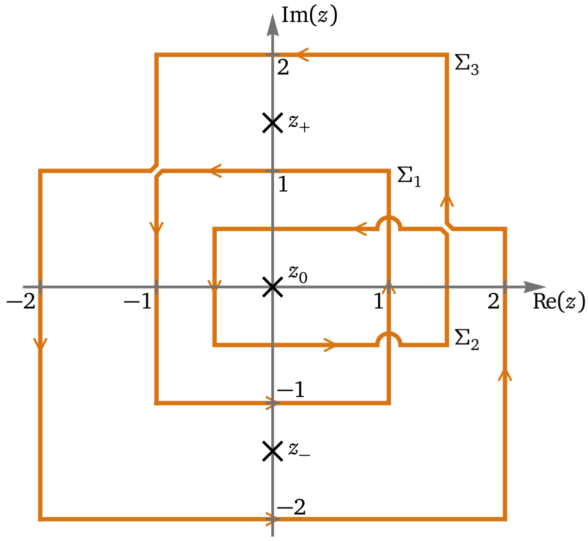


Soluzione del secondo problema

Il percorso di integrazione può essere decomposto nei tre poligoni disgiunti, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$:

- il quadrato $\Sigma_1 = P\{(1+i), (-1+i), (-1-i), (1-i)\}$;
- il rettangolo $\Sigma_2 = P\{(3/2, i/2), (-1/2, i/2), (-1/2, -i/2), (3/2, -i/2)\}$;
- e il poligono convesso $\Sigma_3 = P\{(2, i/2), (3/2, i/2), (3/2, 2i), (-1, 2i), (-1, i), (-2, i), (-2, -2i), (2, -2i)\}$.

Dove si è usata la notazione $P\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ per indicare il poligono di vertici z_1, z_2, ..., z_n. I poligoni sono mostrati in figura. I vertici comuni a due poligoni sono smussati solo per motivi di visualizzazione, allo stesso modo, i punti di intersezioni tra lati di poligoni diversi sono sostituiti con archi.
La funzione integranda ha tre poli semplici in $z_0 = 0$ e $z_\pm = \pm i\sqrt{2}$. Il numero di avvolgimenti della curva Σ rispetto al polo nell'origine è pari a 3, mentre è pari ad uno per entrambi i poli $z_\pm$. In altri termini, il polo z_0 è interno a tutti e tre i poligoni Σ_1, Σ_2 e Σ_3, mentre i poli $z_\pm$ sono interni solo al poligono Σ_3.
Alla luce di ciò, usando il teorema dei residui, l'integrale vale



$$S = 2i\pi \left(3 \operatorname{Res}[f(z), z_0] + \operatorname{Res}[f(z), z_+] + \operatorname{Res}[f(z), z_-]\right) ,$$

dove

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2\,(z^2+2)} .$$

I residui sono

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z_0 = 0] = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}(z)}{z(z^2+2)} = \frac{1}{2}\,;$$
$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_\pm = \pm i\sqrt{2}\right] = \frac{\mathrm{sen}(z_\pm)}{\pm 2 z_\pm^3} = \frac{\mathrm{sen}(i\sqrt{2})}{-i2\sqrt{2}} = -\frac{\mathrm{senh}(\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}\,,$$

e quindi il risultato finale è

$$S = i\pi\left(3 - \frac{\mathrm{senh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right).$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si determinino le due serie di Laurent centrate in $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{sen}(\pi z)}{(1-z)^3} - \frac{1}{z}\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, ha un polo doppio in $z = 1$, centro delle serie di Laurent, e un polo semplice in $z = 0$, ne consegue che si hanno solo due serie di Laurent centrate in $z = 1$, ovvero quelle con domini di convergenza le corone circolari

$$C_1 = \{z : 0 < |z-1| < 1\}\,, \qquad C_2 = \{z : |z-1| > 1\}\,.$$

Consideriamo separatamente i termini della funzione $f(z)$, il primo può essere scritto come

$$\begin{aligned}
\frac{z\,\mathrm{sen}(\pi z)}{(1-z)^3} &= \frac{(z-1)\,\mathrm{sen}(\pi z) + \mathrm{sen}(\pi z)}{(1-z)^3} \\
&= \frac{(z-1)\,\mathrm{sen}(\pi(z-1)+\pi) + \mathrm{sen}(\pi(z-1)+\pi)}{(1-z)^3} \\
&= \frac{(z-1)\,\mathrm{sen}(\pi(z-1)) + \mathrm{sen}(\pi(z-1))}{(z-1)^3} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!}\left[(z-1)^{2k-1} + (z-1)^{2k-2}\right], \qquad \text{con: } m = k-1 \\
&= \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right] \equiv A(z)\,.
\end{aligned}$$

Questo sviluppo in serie, ottenuto dalla serie di Taylor della funzione seno, converge sia in C_1 che in C_2.
Consideriamo il secondo termine della funzione, ovvero il polo semplice nell'origine $1/z$. Nella corona circolare C_1 si ha $|1-z| < 1$, quindi, usando la ben nota serie geometrica,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \equiv B_1(z)\,.$$

Nell corona circolare C_2, i valori di z sono tali che $|z-1| > 1$, per cui

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+1/(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^{-k-1} \equiv B_2(z)\,.$$

Le due serie di Laurent sono

$$
\begin{aligned}
f_1(z) = A(z) - B_1(z) &= \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right] - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (z-1)^k \\
&= \frac{\pi}{(z-1)^2} + \frac{\pi}{z-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!} - 1\right)(z-1)^{2m} + \left(\frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!} + 1\right)(z-1)^{2m+1}\right]; \\
f_2(z) = A(z) - B_2(z) &= \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right] - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (z-1)^{-k-1} \\
&= \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right] + \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^n (z-1)^n + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{\pi}{(z-1)^2} + \frac{\pi}{z-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^n (z-1)^n + \frac{\pi+1}{(z-1)^2} + \frac{\pi-1}{z-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m+3}}{(2m+3)!}\left[(z-1)^{2m+1} + (z-1)^{2m}\right].
\end{aligned}
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si dimostri che la matrice

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix},
$$

rappresenta un operatore diagonalizzabile ma non normale. Si ottenga la rappresentazione spettrale nella forma matriciale

$$
M = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 \,,
$$

dove μ_1 e μ_2 sono gli autovalori, mentre P_1 e P_2 sono le matrici che rappresentano i corrispondenti proiettori ortogonali $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$.

Soluzione del quarto problema

Per dimostrare che l'operatore non è normale è sufficiente verificare che il commutatore della matrice M e della matrice $M^\dagger$, che rappresenta l'aggiunto dell'operatore, sia diverso dalla matrice nulla. La matrice $M^\dagger$, poiché M rappresenta l'operatore rispetto alla base canonica, che è una base ortonormale, si ottiene come complessa coniugata della matrice trasposta di M, ovvero $M^\dagger = M^{T*}$. In definitiva il commutatore non è nullo, infatti

$$
\left[M, M^\dagger\right] = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Gli autovalori μ_1 e μ_2 sono le soluzione dell'equazione secolare

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1-\mu & i \\ 0 & 2-\mu \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\mu)(2-\mu) &= 0
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\mu_1 = 1\,, \qquad \mu_2 = 2\,.
$$

Gli autovettori corrispondenti si ottengono risolvendo l'equazione agli autovalori per μ_1 e μ_2, $Mu_{1,2} = \mu_{1,2}u_{1,2}$ e sono

$$
u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Indichiamo con $\{|e_k\rangle\}_{1,2}$ la base canonica ortonormale, rispetto alla quale l'operatore $\hat{M}$ ha la rappresentazione data, e con $\{|u_k\rangle\}_{1,2}$ l'insieme degli autovettori; anch'esso costituisce una base, poiché gli autovettori sono linearmente indipendenti. Indichiamo con $\hat{R}$ l'operatore che trasforma i vettori della base canonica negli autovettori, ovvero

$$|u_k\rangle = \hat{R}|e_k\rangle\,, \qquad k = 1,2\,.$$

La matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica si ottiene con la procedura standard ed è in relazione con le componenti degli autovettori rispetto alla stessa base canonica, si ha infatti

$$|u_k\rangle = \hat{R}|e_k\rangle = R^j_k|e_j\rangle = u^j_{(k)}|e_j\rangle\,, \qquad k = 1,2\,,$$

da cui $R^j_k = u^j_{(k)}$ per $k, j = 1,2$. Di conseguenza, per la matrice R si ha

$$R = \begin{pmatrix} u^1_{(1)} & u^1_{(2)} \\ u^2_{(1)} & u^2_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Definiamo la matrice inversa come

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix},$$

e ne otteniamo gli elementi sfruttando l'identità

$$\begin{aligned} R^{-1}R &= I \\ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & ia/\sqrt{2} + b/\sqrt{2} \\ c & ic/\sqrt{2} + d/\sqrt{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si hanno gli elemnti

$$a = 1\,, \qquad c = 0\,, \qquad b = -i\,, \qquad d = \sqrt{2}\,,$$

e quindi la forma completa di R^{-1} è

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Le matrici che rappresentano i proiettori rispetto alla base canonica, $P_{1,2}$, si ricavano trasformando con R le matrici diagonali che li rappresentano rispetto alla base degli autovettori, $P_{1d,2d}$. Per il primo proiettore abbiamo

$$\begin{aligned} P_1 &= RP_{1d}R^{-1} \\ P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il secondo proiettore può essere ottenuto sapendo che $P_1 + P_2 = I$, quindi

$$P_2 = I - P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 5/30)

Sia $\{|e_k\rangle\}_{k=-\infty}^{\infty}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert a dimensione infinita E_∞ e $\hat{T}_m$, con $m = 1, 2, \ldots$, l'operatore definito dall'azione

$$\hat{T}_m|e_k\rangle = |e_{k-1}\rangle + \frac{1}{m}|e_k\rangle + |e_{k+1}\rangle\,,$$

si dimostri la disuguaglianza

$$\left\|\hat{T}_m\right\| \le \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}}\,.$$

Si ottenga, infine, la rappresentazione matriciale rispetto alla base data dell'operatore limite

$$\hat{T} = \lim_{m\to\infty} \hat{T}_m\,.$$

Soluzione del quinto problema

Sia $|a\rangle \in E_\infty$, un vettore unitario, considerando la sua decomposizione rispetto alla base data $|a\rangle = a^k|e_k\rangle$, si ha che le componenti verificano la condizione

$$\|a\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|a^k\right|^2 = 1\,.$$

La norma del vettore ottenuto dall'azione dell'operatore $\hat{T}_m$ su $|a\rangle$ è

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{T}_m|a\rangle\right\| &= \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\left(|e_{k-1}\rangle + \frac{1}{m}|e_k\rangle + |e_{k+1}\rangle\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a^{k+1} + \frac{a^k}{m} + a^{k-1}\right)|e_k\rangle\right\| \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|a^{k+1} + \frac{a^k}{m} + a^{k-1}\right|^2\right)^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza triangolare alla norma al quadrato e poi al quadrato della somma di termini non negativi, si ottiene

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{T}_m|a\rangle\right\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|a^{k+1} + \frac{a^k}{m} + a^{k-1}\right|^2 \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\left|a^{k+1}\right| + \frac{\left|a^k\right|}{m^2} + \left|a^{k-1}\right|\right)^2 \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\left|a^{k+1}\right|^2 + \frac{\left|a^k\right|^2}{m^2} + \left|a^{k-1}\right|^2\right) = \left(2 + \frac{1}{m^2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|a^k\right|^2\,.
\end{aligned}$$

La serie finale rappresenta la norma al quadrato del vettore $|a\rangle$, è quindi uguale ad uno, ne consegue che

$$\left\|\hat{T}_m|a\rangle\right\| \le \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|a^k\right|^2} = \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|a\|} = \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}}\,.$$

Per la norma dell'operatore avremo

$$\left\|\hat{T}_m\right\| = \sup_{\|a\|=1}\left\{\left\|\hat{T}_m|a\rangle\right\|\right\} \le \sqrt{2 + \frac{1}{m^2}}\,,$$

che rappresenta la relazione cercata.
La rappresentazione matriciale dell'operatore limite $\hat{T}$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=-\infty}^{\infty}$ si ottiene come limite della rappresentazione dell'operatore $\hat{T}_m$ con $m \to \infty$. L'elemento T^j_k di tale matrice è

$$T^j_k = \langle e_j|\hat{T}|e_k\rangle = \lim_{m\to\infty}\left(\delta^j_{k-1} + \frac{\delta^j_k}{m} + \delta^j_{k+1}\right) = \delta^j_{k-1} + \delta^j_{k+1}\,, \qquad i, j \in \mathbb{Z}\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dw \, \frac{e^{-|x-y|-w^2}}{(y-w)^2+1} \, .$$

Soluzione del sesto Problema

Definendo le tre funzioni

$$f_1(x) = e^{-x^2} \, , \qquad f_2(x) = e^{-|x|} \, , \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1} \, ,$$

è possibile scrivere la funzione integranda nella forma

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dw f_1(w) f_2(x-y) f_3(y-w) = \int_{-\infty}^{\infty} dy (f_1 * f_3)(y) f_2(x-y) = ((f_1 * f_3) * f_2)(x) \, ,$$

e quindi la funzione $F(x)$ come convoluzione della funzione $f_2(x)$ e un'altra convoluzione, $(f_1 * f_3)(x)$. Per ottenere la trasformata di Fourier di $F(x)$, applichiamo due volte il teorema della convoluzione, ovvero

$$\mathscr{F}_k[F] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k[(f_1 * f_3)]\, \mathscr{F}_k[f_2] = 2\pi\, \mathscr{F}_k[f_1]\, \mathscr{F}_k[f_3]\, \mathscr{F}_k[f_2] \, .$$

Le tre trasformate di Fourier sono

$$\mathscr{F}_k[f_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \, , \qquad \mathscr{F}_k[f_2] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2+1} \, , \qquad \mathscr{F}_k[f_3] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \, ,$$

ne consegue che

$$\mathscr{F}_k[F] = \sqrt{2}\, \pi \, \frac{e^{-|k|-k^2/4}}{k^2+1} \, .$$