Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 17 giugno 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Upsilon = \mathrm{Pr}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha)+\mathrm{sen}(2\alpha)} \,.$$

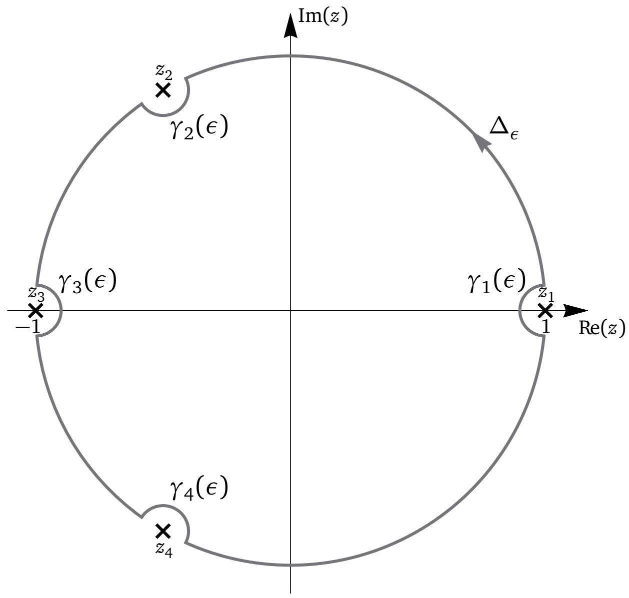
Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. I poli isolati coincidono con gli zeri isolati della funzione a denominatore che può essere posta nella forma

$$d(\alpha) \equiv \mathrm{sen}(\alpha)+\mathrm{sen}(2\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha)+2\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha)(1+2\cos(\alpha)) \,.$$

Gli zeri sono le soluzioni dell'equazione $d(\alpha)=0$, ovvero delle equazioni per le funzioni seno e coseno: $\mathrm{sen}(\alpha)=0$, $\cos(\alpha)=-1/2$. Nella determinazione definita dall'intervallo d'integrazione, si hanno le soluzioni: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=2\pi/3$, $\alpha_3=\pi$, $\alpha_4=4\pi/3$. Facciamo la sostituzione $z=e^{i\alpha}$ e l'integrale assume la forma

$$\Upsilon = 2i\oint_{|z|=1}\frac{-i dz/z}{z-1/z+z^2-1/z^2} = 2\oint_{|z|=1}\frac{z dz}{z^3-z+z^4-1} = 2\oint_{|z|=1}\frac{z dz}{z^4+z^3-z-1} \,.$$



I quattro poli semplici della funzione integranda, indicati in figura dai simboli "×", si ottengono come $z_k=e^{i\alpha_k}$, con

$k = 1,2,3,4$, in termini dei quattro zeri, elementi dell'insieme $\{\alpha_k\}_{k=1}^4$, della funzione $d(\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha) + \mathrm{sen}(2\alpha)$, definita in precedenza.
Consideriamo il percorso "dentato" internamente Δ_ϵ mostrato in grigio in figura, dato dall'unione di sette archi, tre con centro nell'origine, raggio unitario e orientati in senso antiorario (positivo), quattro con centri nei poli z_k, con $k = 1,2,3,4$, raggio ϵ e orientati in senso orario (negativo), ovvero

$$\Delta_\epsilon = \left(\cup_{k=1}^3 \left\{z : z = e^{i\alpha},\, \alpha \in (\alpha_j + \epsilon, \alpha_{j+1} - \epsilon)\right\}\right) \cup \left\{z : z = e^{i\alpha},\, \alpha \in (\alpha_4 + \epsilon, \alpha_1 - \epsilon)\right\} \cup \left(\cup_{j=1}^4 \left(-\gamma_j(\epsilon)\right)\right).$$

Gli archi, infinitesimi nel limite $\epsilon \to 0^+$, centrati nei poli sono

$$\gamma_{1,3}(\epsilon) = \left\{z : z = z_{1,3} \pm \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\pi/2, 3\pi/2)\right\},$$
$$\gamma_{2,4}(\epsilon) = \left\{z : z = z_{2,4} + \epsilon e^{\pm i\theta}, \theta \in (-5\pi/6, \pi/6)\right\}.$$

Poiché il percorso chiuso Δ_ϵ non avvolge singolarità della funzione integranda si ha

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\oint_{\Delta_\epsilon} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1} = 2\,\mathrm{Pr}\int_{|z|=1} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1} + 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{k=1}^4 \int_{-\gamma_k(\epsilon)} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1},$$

da cui si ottiene l'integrale cercato come

$$\Upsilon = 2\,\mathrm{Pr}\int_{|z|=1} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1} = 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k(\epsilon)} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1}.$$

Gli integrali sugli archi $\gamma_k(\epsilon)$, con $k = 1,2,3,4$, sono

$$\int_{\gamma_k(\epsilon)} \frac{z dz}{z^4 + z^3 - z - 1} = i\pi \lim_{z\to z_k} \frac{z(z - z_k)}{z^4 + z^3 - z - 1} = i\pi \frac{z_k}{4z_k^3 + 3z_k^2 - 1} = i\pi \begin{cases} 1/6 & k = 1,\, z_1 = 1 \\ -1/3 & k = 2,\, z_2 = e^{2i\pi/3} \\ 1/2 & k = 3,\, z_3 = -1 \\ -1/3 & k = 4,\, z_4 = e^{4i\pi/3} \end{cases}$$

e la loro somma è uguale a zero, quindi l'integrale richiesto è nullo, ovvero

$$\Upsilon = \mathrm{Pr}\int_{-\pi}^{3\pi/2} \frac{d\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha) + \mathrm{sen}(2\alpha)} = 0.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si usi il teorema della media per dimostrare l'identità

$$\int_{|z|\le R} \frac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^2} d\mathrm{Re}(z) d\mathrm{Im}(z) = \pi R^2,$$

dove l'integrale è esteso alla superficie del disco del piano complesso centrato nell'origine e di raggio R.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La tesi del teorema della media è la seguente: sia $f(z)$ una funzione analitica nel dominio semplicemente connesso D, allora, $\forall\, z_0 \in D$ e $\forall\, R \in (0, \infty)$, tale che la circonferenza di centro z_0 e raggio R, $C_R(z_0)$, sia contenuta in D, ovvero $C_R(z_0) = \{z : |z - z_0| = R\} \subset D$, allora, la rappresentazione integrale di Cauchy in $z = z_0$ dà

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \left\{z = Re^{i\theta}\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right) d\theta,$$

ovvero la media dei valori assunti dalla funzione sulla circonferenza coincide con il valore della funzione nel dentro della stessa.
In generale, l'integrale della funzione $f(z)$ sulla superficie del cerchio avente la circonferenza $C_R(z_0)$ come frontiera

$$\int_{|z-z_0|\le R} f(z) dx dy,$$

dove $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$, in coordinate polari $z = Re^{i\theta}$, con $dxdy = RdRd\theta$, assume la forma

$$\int_{|z-z_0|\le R} f(z)dxdy\,, = \int_0^R \int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)d\theta RdR\,,$$

l'integrale in $d\theta$ può essere calcolato usando il precedente risultato del teorema della media

$$\int_{|z-z_0|\le R} f(z)dxdy\,, = \int_0^R \underbrace{\int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right)d\theta}_{=2\pi f(z_0)} RdR\,, = 2\pi \int_0^R f(z_0)RdR\,,$$

la funzione valutata in $z = z_0$, che compare nell'integranda, no dipende dalla variabile d'integrazione R, quindi

$$\int_{|z-z_0|\le R} f(z)dxdy\,, = 2\pi \int_0^R f(z_0)RdR = 2\pi f(z_0)\int_0^R RdR = 2\pi f(z_0)\frac{R^2}{2} = \pi R^2 f(z_0)\,.$$

Questo risultato può essere applicato al caso in esame con la funzione $f(z) = \mathrm{sen}^2(z)/z^2$, il centro $z_0 = 0$, si ha

$$\int_{|z|\le R} \frac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^2} d\mathrm{Re}(z)d\mathrm{Im}(z) = \int_{|z|\le R} \frac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^2}dxdy = \pi R^2 \left.\frac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^2}\right|_{z=0} = \pi R^2\,,$$

che rappresenta l'identità richiesta.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\daleth = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x\pi)}{x\,(x^4-1)}dx\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere, la funzione seno a numeratore e il polinomio di quinto grado a denominatore. I poli isolati saranno gli zeri del polinomio a denominatore che non sono cancellati da zeri di ordine uguale o superiore. Gli zeri polinomio a denominatore sono

$$z_0 = 0\,, \qquad z_{1,2} = \pm 1\,, \qquad z_{3,4} = \pm i\,.$$

Solo i punti $z_{3,4} = \pm i$ sono poli semplici della funzione integranda, poiché, in corrispondenza di z_0, z_1 e z_2, la funzione seno a numeratore ha zeri semplici che cancellano quelli del polinomio. Ne consegue che gli stessi punti z_0, z_1 e z_2 rappresentano singolarità eliminabili della funzione integranda. Infatti si hanno i valori limite non nulli e non divergenti

$$\lim_{z\to z_{0,1,2}=0} \frac{\mathrm{sen}(z\pi)}{z(z^4-1)} = \frac{\pi\cos(\pi z_{0,1,2})}{5z_{0,1,2}^4 - 1} = \begin{cases} -\pi & z = z_0 = 0 \\ -\pi/4 & z = z_1 = -1 \\ -\pi/4 & z = z_2 = 1 \end{cases}\,.$$

La presenza delle tre singolarità eliminabili permette di deformare il percorso d'integrazione, passando dall'asse reale a

$$\Gamma_\epsilon = (-\infty, -1-\epsilon] \cup \left(-\gamma_{z_1}(\epsilon)\right) \cup [-1+\epsilon, -\epsilon] \cup \left(-\gamma_{z_0}(\epsilon)\right) \cup [+\epsilon, 1-\epsilon]\left(-\gamma_{z_2}(\epsilon)\right) \cup [1+\epsilon, \infty)\,,$$

dove l'arco $\gamma_{z_j(\epsilon)}$, con $j = 0, 1, 2$, è la semicirconferenza centrata in z_j, di raggio ϵ, definita come

$$\gamma_{z_j}(\epsilon) = \left\{z : z = z_j + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\right\}\,.$$

Si ha l'identità

$$\daleth = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x\pi)}{x\,(x^4-1)}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\mathrm{sen}(z\pi)}{z\,(z^4-1)}dz\,.$$

Usando la formula di Eulero per la funzione seno, il lemma di Jordan nel semipiano della parti immaginarie positive per il primo esponenziale e negative per il secondo e il teorema dei residui, si ha

$$\daleth = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz\pi} - e^{-i\pi z}}{z\left(z^4-1\right)} dz = \pi \left(\text{Res}\left[\frac{e^{iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, i\right] - \text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, -i\right] - \text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, 0\right] \right.$$
$$\left. - \text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, -1\right] - \text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, 1\right] \right),$$

dove i segni "meno" degli ultimi quattro residui si hanno in quanto il percorso che li avvolge è chiuso dalla semicirconferenza immersa nel semipiano inferiore ed è , quindi, orientato in senso orario, cioè negativo.
I cinque residui sono

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[\frac{e^{iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, i\right] &= \left.\frac{e^{iz\pi}}{5z^4-1}\right|_{z=i} = \frac{e^{-\pi}}{4}\,; \\
\text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, -i\right] &= \left.\frac{-e^{-iz\pi}}{5z^4-1}\right|_{z=-i} = -\frac{e^{-\pi}}{4}\,; \\
\text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, 0\right] &= \left.\frac{-e^{-iz\pi}}{5z^4-1}\right|_{z=0} = 1\,; \\
\text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, -1\right] &= \left.\frac{-e^{-iz\pi}}{5z^4-1}\right|_{z=-1} = \frac{-e^{i\pi}}{4} = \frac{1}{4}\,; \\
\text{Res}\left[\frac{-e^{-iz\pi}}{z\left(z^4-1\right)}, 1\right] &= \left.\frac{-e^{-iz\pi}}{5z^4-1}\right|_{z=1} = \frac{-e^{-i\pi}}{4} = \frac{1}{4}\,,
\end{aligned}$$

da cui il risultato finale

$$\daleth = \pi\left(\frac{e^{-\pi}}{4} + \frac{e^{-\pi}}{4} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} - 3\right).$$

Quarto problema (punteggio massimo: 8/30)

Si consideri l'equazione vettoriale

$$|a\rangle = \lambda \hat{A} |a\rangle + |b\rangle\,,$$

dove $|a\rangle$ è il vettore incognito, $|b\rangle$ il vettore termine noto, $\hat{A}$ l'operatore nucleo e λ è uno scalare complesso.
Si dimostri che il vettore soluzione $|a\rangle$, per valori di λ tali che: $\lambda^{-1} \in \rho(\hat{A})$ e $\left|\lambda^{-1}\right| \in \left(\|\hat{A}\|, \infty\right)$, dove $\rho(\hat{A})$ è l'insieme risolvente dell'operatore $\hat{A}$, può essere ottenuto come somma della serie vettoriale (convergente)

$$|a\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}^k \lambda^k |b\rangle\,.$$

Nel caso in cui l'operatore $\hat{A}$ e il vettore $|b\rangle$ siano definiti in uno spazio di David Hilbert a tre dimensioni e siano rappresentati, rispetto alla base canonica, dalla matrice e dal vettore seguenti

$$\hat{A} \;\longleftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 0 & e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad |b\rangle \;\longleftrightarrow\; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottenga la rappresentazione del vettore soluzione $|a\rangle$ rispetto alla stessa base canonica.

Soluzione del quarto problema

Isolando il vettore termine noto e applicando su ambo i membri l'inverso dell'operatore $\left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)$, si ha

$$\left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)|a\rangle = |b\rangle \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)^{-1}\left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)|a\rangle = \left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)^{-1}|b\rangle \quad \Rightarrow \quad |a\rangle = \left(\hat{I} - \lambda\hat{A}\right)^{-1}|b\rangle\,.$$

L'invertibilità dell'operatore $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)$ è garantita dalla condizione $\lambda^{-1}\in\rho\left(\hat{A}\right)$. Infatti l'operatore risolvente dell'operatore $\hat{A}$ è

$$\hat{A}_\sigma=\left(\sigma\hat{I}-\hat{A}\right)^{-1},$$

esiste ed è limitato $\forall\sigma\in\rho\left(\hat{A}\right)$. Ma si ha che, $\forall\,\lambda\neq 0$,

$$\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}=\lambda^{-1}\left(\hat{\lambda}^{-1}I-\hat{A}\right)^{-1}=\lambda^{-1}\hat{A}_{\lambda^{-1}},$$

ovvero l'operatore $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}$ è proporzionale all'operatore risolvente $\hat{A}_\sigma$, valutato in $\sigma=\lambda^{-1}$, con fattore di proporzionalità λ^{-1}, limitato in quanto $\lambda\neq 0$. Poiché $\sigma=\lambda^{-1}\in\rho\left(\hat{A}\right)$, si ha che esistono entrambi gli operatori $\hat{A}_{\lambda^{-1}}$ e $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}$. Dimostriamo che l'operatore inverso $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}$, nelle condizioni del problema, può essere ottenuto come somma della serie operatoriale

$$\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k.$$

Nelle condizioni del problema si ha che la serie precedente converge, infatti, considerandone la norma, si ha

$$0\leq\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k\right\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\hat{A}^k\lambda^k\right\|=\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\hat{A}\right\|^k|\lambda|^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\hat{A}\right\||\lambda|\right)^k,$$

quella nell'ultimo membro è la serie geometrica (scalare) di ragione $\left\|\hat{A}\right\||\lambda|$, che, avendo per ipotesi la condizione $\left|\lambda^{-1}\right|\in\left(\left\|\hat{A}\right\|,\infty\right)$, che implica

$$\left|\lambda^{-1}\right|\in\left(\left\|\hat{A}\right\|,\infty\right)\quad\Rightarrow\quad\left\|\hat{A}\right\|<\frac{1}{|\lambda|}<\infty\quad\Rightarrow\quad\left\|\hat{A}\right\||\lambda|<1,$$

converge, in particolare

$$0\leq\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k\right\|\leq\frac{1}{1-\left\|\hat{A}\right\||\lambda|}<\infty.$$

Ne consegue che esiste l'operatore somma della serie, lo indichiamo con $\hat{S}$, si ha cioè

$$\hat{S}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k.$$

Moltiplichiamo sia da sinistra che da destra ambo i membri dell'identità precedente per l'operatore $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)$ si ha

$$\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)\hat{S}=\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k-\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^{k+1}\lambda^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k-\sum_{j=1}^{\infty}\hat{A}^j\lambda^j=\hat{I},$$
$$\hat{S}\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k-\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^{k+1}\lambda^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k-\sum_{j=1}^{\infty}\hat{A}^j\lambda^j=\hat{I}.$$

Queste due identità definiscono $\hat{S}$ come l'inverso dell'operatore $\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)$, cioè

$$\hat{S}=\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k,$$

quindi, riprendendo la prima espressione di questa sezione, si ha che il vettore soluzione

$$|a\rangle=\hat{S}|b\rangle=\left(\hat{I}-\lambda\hat{A}\right)^{-1}|b\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k\lambda^k|b\rangle,$$

ovvero l'identità richiesta.
Consideriamo il caso particolare proposto, gli autovalori dell'operatore rappresentato dalla matrice data sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(I\sigma - A) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} \sigma + i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & -e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 0 & -e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} & \sigma - e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$
$$(\sigma - 1)\left[\left(\sigma - \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{e^{3i\pi/2}}{2}\right] = 0\,,$$

da cui si hanno le due identità

$$\sigma = -i\,, \qquad \sigma = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}} \mp \frac{e^{3i\pi/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + i \mp (-1 + i)}{2}$$

e quindi gli autovalori sono

$$\sigma_1 = -i\,, \quad \sigma_2 = 1\,, \quad \sigma_3 = i\,.$$

Le rappresentazioni matriciali degli autovettori, che indichiamo con u_j, $j = 1, 2, 3$, si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$(A - I\sigma_j)^k_l u^l_{(j)} = 0\,, \qquad \forall k \in \{1, 2, 3\}\,,$$

dove $u^l_{(j)}$ rappresenta l'l-esima componente contro-variante, con $l = 1, 2, 3$, del j-esimo autovettore, ovvero l'autovettore relativo all'autovalore σ_j, con $j = 1, 2, 3$. In dettaglio

$$\begin{pmatrix} -i - \sigma_j & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \sigma_j & e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 0 & e^{3i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \sigma_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1_{(j)} \\ u^2_{(j)} \\ u^3_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (-i - \sigma_j)u^1_{(j)} \\ \left(e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \sigma_j\right)u^2_{(j)} + e^{3i\pi/4}u^3_{(j)}/\sqrt{2} \\ e^{3i\pi/4}u^2_{(j)}/\sqrt{2} + \left(e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \sigma_j\right)u^3_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad j = 1, 2, 3\,,$$

dall'equazione del primo elemento si ottiene che per tutti gli autovalori diversi da i la prima componente è nulla, ovvero: $u^1_{(1)} = u^1_{(2)} = 0$, mentre poniamo $u^1_{(j)} = 1$. Dall'equazione del secondo elemento si ottengono le altre componenti, o meglio, come conseguenza dell'omogeneità del sistema, di una in funzione dell'altra. Ad esempio, otteniamo le terze componenti in funzione delle seconde

$$u^3_{(j)} = -\frac{e^{i\pi/4} - \sqrt{2}\,\sigma_j}{e^{3i\pi/4}}u^2_{(j)}\,.$$

Per il primo autovettore, unico ad avere la prima componente non nulla, poniamo $u^2_{(1)} = u^3_{(1)} = 0$. Negli altri due casi si hanno

$$u^3_{(2)} = -\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4} - 2}{\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}u^2_{(2)} = -\frac{1 + i - 2}{-1 + i}u^2_{(2)} = -u^2_{(2)}\,.$$
$$u^3_{(3)} = -\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4} - 2i}{\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}u^2_{(3)} = -\frac{1 + i - 2i}{-1 + i}u^2_{(2)} = u^2_{(3)}\,.$$

Infine, ponendo $u^2_{(2)} = u^2_{(3)} = 1/\sqrt{2}$, al fine di avere la normalizzazione unitaria, si ottengono le rappresentazioni

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la matrice unitaria, poiché gli autovettore sono ortogonali, diagonalizzante è

$$U = \begin{pmatrix} u^1_{(1)} & u^1_{(2)} & u^1_{(3)} \\ u^2_{(1)} & u^2_{(2)} & u^2_{(3)} \\ u^3_{(1)} & u^3_{(2)} & u^3_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

La rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}$, che si ottiene rispetto alla base degli autovettori, ovvero, trasformando la matrice A con la matrice unitaria U, è

$$A_d = U^\dagger A U = \operatorname{diag}(-i, 1, i) .$$

Ne consegue che l'operatore somma della serie $\hat{S}$, rispetto alla base di autovettori ha anch'esso rappresentazione diagonale, cioè

$$S_d = \sum_{k=0}^{\infty} A_d^k \lambda^k .$$

La seconda, terza e quarta potenza della matrice A_d sono

$$A_d^2 = \operatorname{diag}(-1, 1, -1) , \qquad A_d^3 = \operatorname{diag}(i, 1, -i) = A_d^* , \qquad A_d^4 = \operatorname{diag}(1, 1, 1) = I .$$

Alla luce dell'ultima identità, riscriviamo la serie nella forma

$$\begin{aligned} S_d = \sum_{k=0}^{\infty} A_d^k \lambda^k &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(A_d^{4j} \lambda^{4k} + A_d^{4j+1} \lambda^{4k+1} + A_d^{4j+2} \lambda^{4k+2} + A_d^{4j+3} \lambda^{4k+3} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(I \lambda^{4k} + A_d \lambda^{4k+1} + A_d^2 \lambda^{4k+2} + A_d^* \lambda^{4k+3} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(I + A_d \lambda + A_d^2 \lambda^2 + A_d^* \lambda^3 \right) \lambda^{4k} \\ &= \left(I + A_d \lambda + A_d^2 \lambda^2 + A_d^* \lambda^3 \right) \frac{1}{1 - \lambda^4} . \end{aligned}$$

La convergenza della serie geometrica di ragione λ^4 è garantita dalla condizione

$$\left\| \hat{A} \right\| |\lambda| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |\lambda| < \frac{1}{\left\| \hat{A} \right\|}$$

e dal fatto che in questo caso la norma dell'operatore $\hat{A}$ sia unitaria, ovvero $\left\| \hat{A} \right\| = 1$, quindi

$$|\lambda| < \frac{1}{\left\| \hat{A} \right\|} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left| \lambda^4 \right| = |\lambda|^4 < 1 .$$

La matrice S_d ha la forma

$$S_d = \operatorname{diag}\left(1 - i\lambda - \lambda^2 + i\lambda^3, 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3, 1 + i\lambda - \lambda^2 - i\lambda^3 \right) \frac{1}{1 - \lambda^4} ,$$

fattorizzando sia gli elementi diagonali che il polinomio di quarto grado a denominatore in prodotti di polinomi di primo grado, ovvero zeri semplici, è possibile fare delle semplificazioni per arrivare ad una forma più compatta, infatti si ha

$$\begin{aligned} S_d &= \operatorname{diag}\left((1 - i\lambda)\left(1 - \lambda^2\right), (1 + \lambda)\left(1 + \lambda^2\right), (1 + i\lambda)\left(1 - \lambda^2\right) \right) \frac{1}{(1-\lambda)(1+\lambda)(1-i\lambda)(1+i\lambda)} \\ S_d &= \operatorname{diag}(1 + i\lambda, 1 - \lambda, 1 - i\lambda) . \end{aligned}$$

La rappresentazione rispetto alla base canonica, che indichiamo con S, si ottiene con la trasformazione inversa

$$
\begin{aligned}
S = US_d U^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda)/\sqrt{2} & (1-i\lambda)/\sqrt{2} \\ 0 & -(1-\lambda)/\sqrt{2} & (1-i\lambda)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda(1+i)/2 & \lambda(1-i)/2 \\ 0 & \lambda(1-i)/2 & 1-\lambda(1+i)/2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Infine, il vettore $|a\rangle$, soluzione dell'equazione con questo operatore $\hat{A}$ e il vettore termine noto $|b\rangle$ dato, ha rappresentazione canonica

$$
|a\rangle = \hat{S}|b\rangle \quad \hookleftarrow \quad a = Sb = \begin{pmatrix} 1+i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda(1+i)/2 & \lambda(1-i)/2 \\ 0 & \lambda(1-i)/2 & 1-\lambda(1+i)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\lambda \\ 1-i\lambda \\ 1-i\lambda \end{pmatrix} .
$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
\aleph = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(\mathrm{sen}(\pi x)\right)}{x^4+1} dx \,,
$$

dove il simbolo $\delta(y)$ indica la distribuzione di Paul Adrien Maurice Dirac valutata in $y \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La funzione che costituisce l'argomento della distribuzione gamma è intera e possiede solo zeri semplici nei punti della successione $\{x_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ne consegue che

$$
\begin{aligned}
\aleph &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x_k-\eta}^{x_k+\eta} \frac{\delta(x-x_k)}{x^4+1} \frac{1}{|d\mathrm{sen}(\pi x)/dx|_{x=x_k}} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x_k-\eta}^{x_k+\eta} \frac{\delta(x-x_k)}{x^4+1} \frac{1}{\pi\,|\cos(\pi x_k)|} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x_k^4+1)\,|\cos(\pi x_k)|} \,,
\end{aligned}
$$

quindi con $x_k = k$ e $|\cos(\pi x_k)| = 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$
\aleph = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4+1} \,.
$$

La somma della serie può essere ottenuta con il metodo dei residui. Consideriamo l'integrale

$$
S_n = \oint_{C_n} \frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1} dz \,,
$$

dove $C_n = \{z : |z| = n+1/2\}$ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, con $n \in \mathbb{N}$. Tale circonferenza, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, avvolge i quattro poli semplici $z_k = e^{(2k+1)i\pi/4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, generati dal polinomio z^4+1 a denominatore della funzione integranda, e anche i $2n+1$ poli semplici dovuti agli zeri della funzione $\mathrm{sen}(\pi z)$ nei punti $z = j$, con $j = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1, n$. Ne consegue che, applicando il teorema dei residui e considerando anche il limite $n \to \infty$, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \oint_{C_n} \frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1} dz = 2i\pi \Bigg(&\sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right] \\
&+ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = j \right] \Bigg)
\end{aligned}
$$

Questo valore limite è nullo poiché la funzione integranda tende uniformemente a zero sulla circonferenza C_n al divergere di n. Infatti, con $z \in \mathbb{C}_n$, cioè $|z| = n + 1/2$, si ha

$$0 \le \left| \frac{\pi \cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1} z \right| \le \pi \underbrace{\left| \frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \right|}_{\le 1} \underbrace{\frac{\overbrace{n+1/2}^{<n}}{\left|(n+1/2)^4 - 1\right|}}_{>n^4} < \frac{\pi}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

da cui

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} S_n &= 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi \cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi \cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = j \right] \right) \\ &= 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi \cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j^4+1} \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'espressione esplicita del residuo in $z = j$. La serie, a meno del fattore $1/\pi$ è quella cercata, ovvero $\aleph$. Dall'ultima identità segue che

$$\aleph = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4+1} = -\sum_{k=0}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right].$$

I residui nei poli semplici $z_k = e^{(2k+1)i\pi/4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right] = \lim_{z\to z_k} \frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{z - z_k}{z^4+1} = \frac{\cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} \frac{1}{4z_k^3} = -\frac{\cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} \frac{z_k}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

La loro somma, avendo che $z_3^* = z_0$ e $z_2^* = z_1$,

$$\aleph = -\sum_{k=0}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \frac{1}{z^4+1}, z = e^{(2k+1)i\pi/4} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(z_0\pi)}{\operatorname{sen}(z_0\pi)} z_0 + \frac{\cos(z_1\pi)}{\operatorname{sen}(z_1\pi)} z_1 \right),$$

con $z_{0,1} = (\pm 1 + i)/\sqrt{2}$ e ponendo $a = \pi/\sqrt{2}$, si ha

$$\begin{aligned} \aleph &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\cos\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\left(\pi(-1+i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(-1+i)/\sqrt{2}\right)} \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\cos\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\left(\pi(1-i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(1-i)/\sqrt{2}\right)} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(2\operatorname{Re}\left(\frac{\cos\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\cos\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(1+i)/\sqrt{2}\right)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(a)\cos(ia) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(ia)}{\operatorname{sen}(a)\cos(ia) + \cos(a)\operatorname{sen}(ia)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(a)\cosh(a) - i\operatorname{sen}(a)\operatorname{senh}(a)}{\operatorname{sen}(a)\cosh(a) + i\cos(a)\operatorname{senh}(a)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\cos(a)\cosh(a) - i\operatorname{sen}(a)\operatorname{senh}(a)\right)\left(\operatorname{sen}(a)\cosh(a) - i\cos(a)\operatorname{senh}(a)\right)(1+i)}{\operatorname{sen}^2(a)\cosh^2(a) + \cos^2(a)\operatorname{senh}^2(a)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\operatorname{sen}(a)\cos(a) - i\operatorname{senh}(a)\cosh(a)\right)(1+i)}{\operatorname{sen}^2(a)\cosh^2(a) + \cos^2(a)\operatorname{senh}^2(a)} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\operatorname{sen}(2a) - i\operatorname{senh}(2a)\right)(1+i)}{\operatorname{sen}^2(a)\left(1 - \operatorname{senh}^2(a)\right) + \cos^2(a)\operatorname{senh}^2(a)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left(\frac{\left(\operatorname{sen}(2a) - i\operatorname{senh}(2a)\right)(1+i)}{\operatorname{sen}^2(a) - \operatorname{senh}^2(a)} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sen}(2a) + \operatorname{senh}(2a)}{-\cos(2a)/2 + 1/2 + \cosh(2a)/2 - 1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{senh}(2a) + \operatorname{sen}(2a)}{\cosh(2a) - \cos(2a)}. \end{aligned}$$

Il risultato finale, con $2a = \sqrt{2}\pi$, è

$$\aleph = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(\operatorname{sen}(\pi x)\right)}{x^4+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{sen}(\sqrt{2}\pi)}{\cosh(\sqrt{2}\pi) - \cos(\sqrt{2}\pi)}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Jean-Baptiste Joseph Fourier della funzione

$$f(x) = x^3 e^{-\mu x^2}, \qquad \mu \in (0, \infty).$$

Soluzione del sesto Problema

Il calcolo della trasformata di Fourier può essere effettuato usando due volte la formula per la derivata. In particolare si hanno le prime tre derivate

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{-\mu x^2} &= -2\mu\, x e^{-\mu x^2}; \\ \frac{d^2}{dx^2} e^{-\mu x^2} &= -2\mu \left(1 - 2\mu x^2\right) e^{-\mu x^2}; \\ \frac{d^3}{dx^3} e^{-\mu x^2} &= -8\mu^3 \left(-\frac{3x}{2\mu} + x^3\right) e^{-\mu x^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = x^3 e^{-\mu x^2} = -\frac{1}{8\mu^3} \frac{d^3}{dx^3} e^{-\mu x^2} + \frac{3}{2\mu} x e^{-\mu x^2},$$

che, usando

$$x e^{-\mu x^2} = -\frac{1}{2\mu} \frac{d}{dx} e^{-\mu x^2},$$

diventa

$$f(x) = -\frac{1}{8\mu^3} \frac{d^3}{dx^3} e^{-\mu x^2} + \frac{3}{2\mu} x e^{-\mu x^2} = -\frac{1}{8\mu^3} \frac{d^3}{dx^3} e^{-\mu x^2} - \frac{3}{4\mu^2} \frac{d}{dx} e^{-\mu x^2}.$$

Alla luce di questo risultato, la trasformata di Fourier assume la forma

$$\mathscr{F}_k[f] = -\frac{1}{8\mu^3} \mathscr{F}_k\left[\frac{d^3}{dx^3} e^{-\mu x^2}\right] - \frac{3}{4\mu^2} \mathscr{F}_k\left[\frac{d}{dx} e^{-\mu x^2}\right] = ik\left(-\frac{(ik)^2}{8\mu^3} - \frac{3}{4\mu^2}\right) \mathscr{F}_k\left[e^{-\mu x^2}\right].$$

Infine avvalendosi della trasformata di Fourier nota

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-\mu x^2}\right] = \frac{e^{-k^2/(4\mu)}}{\sqrt{2\mu}},$$

si ha

$$\mathscr{F}_k\left[x^3 e^{-\mu x^2}\right] = ik\left(\frac{k^2}{8\mu^3} - \frac{3}{4\mu^2}\right) \frac{e^{-k^2/(4\mu)}}{\sqrt{2\mu}} = ik \frac{k^2 - 6\mu}{8\sqrt{2}\mu^{7/2}} e^{-\mu x^2}.$$