Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello invernale - 17 gennaio 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che l'integrale

$$☼_a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+ia}{\operatorname{senh}(x+ia)} dx\,,$$

è costante $\forall\, a \in (-\pi, \pi)$ e se ne calcoli il valore.

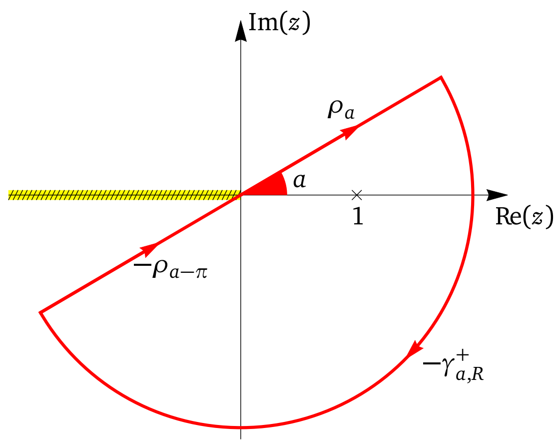
Soluzione del primo problema

Riscriviamo la funzione integranda come

$$☼_a = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+ia}{e^{x+ia}-e^{-x-ia}} dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+ia}{e^{2(x+ia)}-1} e^{x+ia} dx\,.$$

Facciamo la sostituzione $z = e^{x+ia}$, da cui $x = \ln(z) - ia$ e $dx = dz/z$, l'integrale diventa

$$☼_a = 2\int_{\rho_a} \frac{\ln(z)}{z^2-1} z \frac{dz}{z} = 2\int_{\rho_a} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz\,,$$



dove ρ_a è la semiretta che esce dall'origine e forma con il semiasse reale positivo un angolo pari ad $a \in (-\pi, \pi) \backslash \{0\}$, ovvero

$$\rho_a = \left\{z : z = re^{ia}\,,\, r \in [0, \infty)\right\}\,.$$

Escludiamo il caso $a = 0$, che tratteremo alla fine.
La funzione integranda è polidroma con punti di diramazione nell'origine e all'infinito e ha due poli semplici nei punti $z_\pm = \pm 1$. Scegliendo di tagliare lungo il semiasse reale negativo, come suggerito dall'intervallo permesso per il parametro a, il dominio di analiticità della funzione integranda è $D = \mathbb{C} \backslash ((-\infty, 0] \cup \{1\})$, ovvero il piano complesso privato sia della regione di discontinuità dovuta alla polidromia, che del polo $z_+ = 1$, non appartenente al taglio che è stato già escluso.

Consideriamo i percorsi chiusi

$$-\Gamma^+_{a,R} = \left\{z : z = re^{ia}\,,\, r \in [-R, R]\right\} \cup \left(-\left\{z : z = Re^{i\theta}\,,\, \theta \in [a-\pi, a]\right\}\right) \equiv \left\{z : z = re^{ia}\,,\, r \in [-R, R]\right\} \cup \left(-\gamma^+_{a,R}\right)\,,$$

$$\Gamma^-_{a,R} = \left\{z : z = re^{ia}\,,\, r \in [-R, R]\right\} \cup \left(-\left\{z : z = Re^{i\theta}\,,\, \theta \in [a, a+\pi]\right\}\right) \equiv \left(-\left\{z : z = re^{ia}\,,\, r \in [-R, R]\right\}\right) \cup \gamma^-_{a,R}\,,$$

che consideriamo, rispettivamente, nei casi $a >$ e la $a < 0$. il primo dei quali è mostrato in figura. Rappresentano le frontiere di semicerchi centrati nell'origine di raggio R, i cui diametri formano con il semiasse reale positivo rispettivamente gli angoli $a \in (o, \pi)$ (mostrato in figura) e $\pi + a \in (0, \pi)$. Per valori del raggio R tali che $R > 1$, si hanno $\Gamma^+_{a,R}, \Gamma^-_{a,R}, \subset D \cup \{0\}$ e $n\left(1, \mp\Gamma^\pm_{a,R}\right) = \mp 1$, quindi

$$2\oint_{\mp\Gamma^\pm_{a,R}} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz = \mp 4i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\ln(z)}{z^2-1}, 1\right].$$

Per $a \gtrless 0$, nel limite $R \to \infty$ il diametro che rappresenta la parte rettilinea del percorso chiuso $\mp\Gamma^\pm_{a,R}$ tende all'unione delle semirette ρ_a e $(-\rho_{a\mp\pi})$, la prima è il percorso d'integrazione dell'integrale richiesto, la seconda è la semiretta entrante nell'origine formando l'angolo negativo $a \mp \pi$ con il semiasse reale positivo, cioè

$$\lim_{R\to\infty}\left(\mp\Gamma^\pm_{a,R}\right) = \rho_a \cup (-\rho_{a\mp\pi}) \cup \lim_{R\to\infty}\left(\mp\gamma^\pm_{a,R}\right).$$

Dimostriamo che

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma^\pm_{a,R}} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz = 0,$$

verificando il limite uniforme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\ln(z)}{z^2-1} z \overset{\text{U.}}{=} 0, \qquad \forall\, z \in \gamma^\pm_{a,R}.$$

A tal fine consideriamo, sia $\forall\, z \in \gamma^+_{a,R}$, cioè $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [a-\pi, a] \subset (0, \pi)$, che $\forall\, z \in \gamma^-_{a,R}$, cioè $z = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [a, a+\pi] \subset (-\pi, 0)$, la maggiorazione

$$0 \le \left|\frac{\ln(z)}{z^2-1} z\right| \le \frac{|\ln(R) + i\theta|}{|R^2-1|} R = \frac{\sqrt{\ln^2(R) + \theta^2}}{|R^2-1|} R = \frac{\sqrt{\ln^2(R) + \pi^2}}{|R^2-1|} R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

segue, nello stesso limite, l'annullamento degli integrali precedenti sugli archi $\gamma^+_{a,R}$ e $\gamma^-_{a,R}$.
Consideriamo i valori limite degli integrale sui percorsi chiusi $\mp\Gamma^\pm_{a,R}$, rispettivamente nei casi in cui $a \in (0, \pi)$ e $a \in (-\pi, 0)$, e avremo

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} 2\oint_{-\Gamma^+_{a,R}} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz &= 2\int_{\rho_a} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz + 2\int_{-\rho_{a-\pi}} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz = \text{☼}_a - 2\int_{\rho_{a-\pi}} \frac{\ln(z)}{z^2-1} dz \\
&= \text{☼}_a - 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{i(a-\pi)}\right)}{r^2 e^{2i(a-\pi)} - 1} e^{i(a-\pi)} dr = \text{☼}_a + 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{ia}\right) + \ln\left(e^{-i\pi}\right)}{r^2 e^{2ia} - 1} e^{ia} dr \\
&= \text{☼}_a + 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{ia}\right) - i\pi}{r^2 e^{2ia} - 1} e^{ia} dr = 2\text{☼}_a - 2i\pi\int_0^\infty \frac{e^{ia} dr}{r^2 e^{2ia} - 1} \\
&= 2\text{☼}_a - i\pi\left(\int_0^\infty \frac{e^{ia} dr}{re^{ia} - 1} - \int_0^\infty \frac{e^{ia} dr}{re^{ia} + 1}\right) = 2\text{☼}_a - i\pi \ln\left(\frac{re^{ia} - 1}{re^{ia} + 1}\right)\Bigg|_0^\infty \\
&= 2\text{☼}_a - i\pi(-i\pi) = 2\text{☼}_a - \pi^2.
\end{aligned}$$

In questo caso, che ribadiamo essere quello in cui il parametro a assume valori positivi, la fase del rapporto $-1/1$ che rappresenta l'argomento della funzione logaritmo valutata in $r = 0$, è pari a $+i\pi$. Discuteremo di seguito tale scelta.
Nel secondo caso in cui il parametro a assume valori negativi, in particolare $a \in (-\pi, 0)$, il valore limite dell'integrale

vale

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} 2\oint_{\Gamma^-_{a,R}} \frac{\ln(z)}{z^2-1}dz &= 2\int_{\rho_a}\frac{\ln(z)}{z^2-1}dz + 2\int_{-\rho_{a+\pi}}\frac{\ln(z)}{z^2-1}dz = \text{☼}_a - 2\int_{\rho_{a+\pi}}\frac{\ln(z)}{z^2-1}dz \\
&= \text{☼}_a - 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{i(a+\pi)}\right)}{r^2e^{2i(a+\pi)}-1}e^{i(a-\pi)}dr = \text{☼}_a + 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{ia}\right)+\ln\left(e^{i\pi}\right)}{r^2e^{2ia}-1}e^{ia}dr \\
&= \text{☼}_a + 2\int_0^\infty \frac{\ln\left(re^{ia}\right)-i\pi}{r^2e^{2ia}-1}e^{ia}dr = 2\text{☼}_a + 2i\pi\int_0^\infty \frac{e^{ia}dr}{r^2e^{2ia}-1} \\
&= 2\text{☼}_a + i\pi\left(\int_0^\infty \frac{e^{ia}dr}{re^{ia}-1} - \int_0^\infty \frac{e^{ia}dr}{re^{ia}+1}\right) = 2\text{☼}_a + i\pi\ln\left(\frac{re^{ia}-1}{re^{ia}+1}\right)\Bigg|_0^\infty \\
&= 2\text{☼}_a + i\pi(+i\pi) = 2\text{☼}_a - \pi^2 .
\end{aligned}
$$

La fase del rapporto $-1/1$, che rappresenta, come nel caso precedente, l'argomento della funzione logaritmo valutata in $r=0$, è scelta uguale a $-i\pi$. Discutiamo di seguito i motivi per le scelte delle fasi. L'argomento della funzione logaritmo è

$$\frac{re^{ia}-1}{re^{ia}+1},$$

studiamo la dipendenza dal segno del parametro a della fase di questa funzione, nel limite $r\to 0^+$. In generale, per il denominatore e il numeratore si hanno le rappresentazioni polari

$$re^{ia}\pm 1 = \left|re^{ia}\pm 1\right| e^{i\theta_\pm},$$

dove θ_+ e θ_- rappresentano rispettivamente la fase del denominatore e quella del numeratore. Nel limite considerato, cioè per $r\to 0^+$, usiamo l'approssimazione

$$re^{ia}\pm 1 = \pm 1 + r\left(1+ia+\frac{(ia)^2}{2!}+\cdots\right) \simeq \pm 1 + ria = \sqrt{1+r^2a^2}\,e^{i\arctan(ra/\pm 1)},$$

da cui, sempre nel limite $r\to 0^+$,

$$\theta_\pm = \arctan\left(\frac{ra}{\pm 1}\right).$$

Studiamo i casi possibili in funzione del segno del parametro a.

- Se $a>0$

$$
\begin{aligned}
\theta_+ &= \arctan\left(\frac{ra}{+1}\right) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0^+ , &\qquad& \text{primo quadrante: } \operatorname{Re}(z)>0 \text{ e } \operatorname{Im}(z)>0 ,\\
\theta_- &= \arctan\left(\frac{ra}{-1}\right) \xrightarrow[r\to 0^+]{} \pi^- , && \text{secondo quadrante: } \operatorname{Re}(z)<0 \text{ e } \operatorname{Im}(z)>0 .
\end{aligned}
$$

- Se, invece, $a<0$

$$
\begin{aligned}
\theta_+ &= \arctan\left(\frac{ra}{+1}\right) = \arctan\left(\frac{-r|a|}{+1}\right) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0^- , &\qquad& \text{quarto quadrante: } \operatorname{Re}(z)>0 \text{ e } \operatorname{Im}(z)<0 ,\\
\theta_- &= \arctan\left(\frac{ra}{-1}\right) = \arctan\left(\frac{-r|a|}{-1}\right) \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\pi^+ , && \text{terzo quadrante: } \operatorname{Re}(z)<0 \text{ e } \operatorname{Im}(z)<0 .
\end{aligned}
$$

Questi valori delle fasi sono stati ottenuti tendo presente che la determinazione principale è $(-\pi,\pi)$.
Alla luce di quanto discusso, avremo

$$\lim_{r\to 0^+}\ln\left(\frac{re^{ia}-1}{re^{ia}+1}\right) = i\left(\theta_- - \theta_+\right) = \begin{cases} +i\pi & a>0 \\ -i\pi & a<0 \end{cases},$$

che sono i valori usati nei calcoli precedenti.
Gli stessi integrali possono essere calcolati in termini del residuo in $z_+ = 1$ e si ha che, in entrambi i casi gli integrali sono nulli, infatti

$$\lim_{R\to\infty} 2\oint_{\mp\Gamma^{\pm}_{a,R}} \frac{\ln(z)}{z^2-1}dz = \mp 4i\pi\,\mathrm{Re}\left[\frac{\ln(z)}{z^2-1}, 1\right] = \mp 4i\pi \lim_{z\to 1}\frac{\ln(z)}{z^2-1}(z-1) = \mp 4i\pi \lim_{z\to 1}\frac{\ln(z)}{z+1} = 0\,.$$

Dai due risultati precedenti si ha che, $\forall\, a \in (-\pi,\pi)$,

$$\text{☼}_a = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

L'integrale è quindi indipendente dal parametro $a \in (-\pi,\pi)\backslash\{0\}$.
Consideriamo, come anticipato, il caso $a = 0$, cioè l'integrale

$$\text{☼}_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\mathrm{senh}(x)}dx\,.$$

La funzione integranda ha una singolarità eliminabile nell'origine, infatti

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\mathrm{senh}(z)} = 1\,.$$

Definiamo il percorso chiuso rettangolare con i lati paralleli agli assi, simmetrico rispetto all'asse immaginario e con la base appartenente all'asse reale,

$$\Omega_R = [-R,R]\cup[R,R+i\pi/2]\cup[R+i\pi/2,-R+i\pi/2]\cup[-R+i\pi/2,-R]\,,$$

dove il simbolo $[z_1,z_2]$ indica il tratto rettilineo avente per estremi i punti z_1 e z_2, orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. L'integrale su tale percorso chiuso della funzione integranda data è nullo, indipendentemente dal valore di R, per il teorema di Cauchy, in quanto il percorso Γ_R è contenuto nel dominio di analiticità della funzione integranda $D = \{z : z \neq ik\pi\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. Lo stesso integrale può essere scritto come somma dei quattro contributi sui tratti rettilinei. Ne consegue che, nel limite $R\to\infty$, si ha

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Omega_R}\frac{z}{\mathrm{senh}(z)}dz &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{x}{\mathrm{senh}(x)}dx + \int_{R}^{-R}\frac{x+i\pi/2}{\mathrm{senh}(x+i\pi/2)}dx\right.\\
&\qquad\left. + i\int_0^{\pi/2}\frac{R+iy}{\mathrm{senh}(R+iy)}dy + i\int_{\pi/2}^{0}\frac{-R+iy}{\mathrm{senh}(-R+iy)}dy\right)\\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\mathrm{senh}(x)}dx}_{=\text{☼}_0} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+i\pi/2}{i\cosh(x)}dx\\
&\qquad + \lim_{R\to\infty}\left(i\int_0^{\pi/2}\frac{R+iy}{\mathrm{senh}(R+iy)}dy + i\int_{\pi/2}^{0}\frac{-R+iy}{\mathrm{senh}(-R+iy)}dy\right)\\
&= \text{☼}_0 - \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\cosh(x)}}_{=0\ (x/\cosh(x)\,\text{è dispari})} - \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh(x)}\\
&\qquad + \lim_{R\to\infty}\left(i\int_0^{\pi/2}\frac{R+iy}{\mathrm{senh}(R+iy)}dy + i\int_{\pi/2}^{0}\frac{-R+iy}{\mathrm{senh}(-R+iy)}dy\right).
\end{aligned}$$

I valori limite degli ultimi due integrali sono nulli, infatti, usando la disuguaglianza di Darboux si ha

$$0 \le \left|\int_0^{\pi/2}\frac{\pm R+iy}{\mathrm{senh}(\pm R+iy)}dy\right| \le \int_0^{\pi/2}\frac{2|\pm R+iy|}{\left|e^{\pm R+iy}-e^{\mp R-iy}\right|}dy \le \int_0^{\pi/2}\frac{2(R+y)}{e^R\,|1-e^{-2R}|}dy = \frac{\pi R+\pi^2/4}{e^R\,|1-e^{-2R}|}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Si ottiene quindi

$$\text{☼}_0 = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh(x)}\,.$$

Facciamo la sostituzione $e^x = w$, ovvero $x = \ln(w)$ e $dx = dw/w$, e usiamo la simmetria della funzione integranda nella variabile w rispetto allo scambio $w \to -w$, otteniamo quindi

$$\text{☼}_0 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \pi \int_0^{\infty} \frac{dw}{w^2+1} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w^2+1} \,.$$

La funzione integranda ha solo due singolarità, i due poli semplici $z_{\pm} = \pm i$. Usiamo il lemma di Jordan e possiamo chiudere indifferentemente nel semipiano della parti immaginarie positive o negative, nel primo caso dovremmo considerare il polo semplice $z_+ = i$, nel secondo il polo semplice $z_- = -i$. Chiudendo nel semipiano delle parti immaginarie positive, definiamo il percorso chiuso

$$\Delta_R = [-R, R] \cup C_R^+ \,,$$

dove C_R^+ è la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio R e appartenente al semipiano delle parti immaginarie positive, cioè $C_R^+ = \left\{z : z = Re^{i\theta}\,,\, \theta \in [0, \pi]\right\}$. L'integrale su tale percorso chiuso della funzione integranda data, nel limite $R \to \infty$ è pari a $2i\pi$ volte il residuo in $z_+ = i$, ovvero

$$\frac{\pi}{2} \int_{\Delta_R} \frac{dz}{z^2+1} = i\pi^2 \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+1}, i\right] = i\pi^2 \lim_{z \to i} \frac{1}{z^2+1}(z-i) = \frac{\pi^2}{2} \,.$$

In termini dei due contributi sul tratto rettilineo e sull'arco, e nel limite $R \to \infty$, alla luce del fatto che il risultato precedente non dipende da R, si ha

$$\frac{\pi^2}{2} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{\Delta_R} \frac{dz}{z^2+1} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1}}_{=\text{☼}_0} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{C_R^+} \frac{dz}{z^2+1}}_{=0} = \text{☼}_0 \,,$$

da cui

$$\text{☼}_0 = \frac{\pi^2}{2} \,.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall\, a \in (-\pi, \pi)$, incluso il valore nullo, l'integrale ☼_a è costante e vale $\pi^2/2$.

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espansione di Weierstrass del polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$

$$\text{☮}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \,.$$

Si verifichi che essa coincide con la fattorizzazione in binomi, dati dalle differenze tra la variabile e gli zeri, il tutto moltiplicato per il coefficiente della potenza massima.

Soluzione del secondo problema

L'espansione di Weierstrass per una funzione $f(z)$ intera avente un numero finito $N \in \mathbb{N}$ di zeri nei punti $z_k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ con molteplicità $m_k \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$,

$$f(z) = f(0) e^{z f'(0)/f(0)} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{z_z}\right)^{m_k} e^{z m_k / z_k} \,.$$

Il polinomio $\text{☮}_n(z)$ rappresenta la somma parziale n-esima della serie geometrica di ragione z. Possiamo sfruttare il metodo per il calcolo di tale soma per ottenerne gli zeri. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1-z)$ si ha

$$\text{☮}_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \,.$$

Sappiamo che il polinomio è una funzione intera, quindi il punto $z = 1$ in cui si annulla il denominatore dell'espressione precedente non può che essere una singolarità eliminabile, infatti

$$\lim_{z\to 1} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \lim_{z\to 1} \frac{-(n+1) z^n}{-1} = n + 1 \,.$$

Ne consegue che gli n zeri del polinomio $\text{☮}_n(z)$ sono le ultime n radici $(n+1)$-esime dell'unità, ovvero quelle diverse dalla stessa unità. Infatti si ha

$$\text{☮}_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_k^{n+1} = 1 = e^{2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k = 2^{2ik\pi/(n+1)}\,, \qquad k \in \{1,2,\dots,n\}\,,$$

sono tutti zeri semplici, essendo in numero pari al grado del polinomio e tutti diversi. I valori del polinomio e della sua derivata prima nell'origine sono

$$\text{☮}_n(0) = 1\,, \qquad \text{☮}'_n(0) = \sum_{k=1}^{n} k z^{n-1}\bigg|_0 = 1\,,$$

si ha quindi l'espansione di Weierstrass

$$\text{☮}_n(z) = \text{☮}_n(0)\exp\left(z\frac{\text{☮}'_n(0)}{\text{☮}_n(0)}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{m_k} e^{zm_k/z_k} = e^z\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{z/z_k}\,,$$

l'ultima identità si ha poiché $m_k = 1$, $\forall\, k \in \{1,2,\dots,n\}$. È possibile semplificare ulteriormente, si ha

$$\begin{aligned}\text{☮}_n(z) &= e^z \exp\left(z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\prod_{k=1}^{n}(z_k - z)\\ &= e^z\exp\left(z\sum_{k=1}^{n}e^{-2ik\pi/(n+1)}\right)\exp\left(\frac{2i\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\right)\prod_{k=1}^{n}(z_k-z)\,.\end{aligned}$$

Le due somme possono essere calcolate esplicitamente, la prima è la somma parziale n-esima della serie geometrica di ragione $e^{-2i\pi/(n+1)}$, la seconda è la somma dei primi n numeri naturali. Si hanno

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}e^{-2ik\pi/(n+1)} = -1 + \sum_{k=0}^{n}\left(e^{-2i\pi/(n+1)}\right)^k = -1 + \frac{1-\left(e^{-2i\pi/(n+1)}\right)^{n+1}}{1-e^{-2i\pi/(n+1)}} = -1 + \frac{1-e^{-2i\pi}}{1-e^{-2i\pi/(n+1)}} = -1\,;\\ &\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\,,\end{aligned}$$

sostituendo questi risultati nell'espressione precedente

$$\begin{aligned}\text{☮}_n(z) &= e^z\exp\Bigg(z\underbrace{\sum_{k=1}^{n}e^{-2ik\pi/(n+1)}}_{=-1}\Bigg)\exp\Bigg(\frac{2i\pi}{n+1}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{n(n+1)/2}\Bigg)\prod_{k=1}^{n}(z_k-z)\\ &= e^{ni\pi}\prod_{k=1}^{n}(z_k-z) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}(z_k-z)\,,\end{aligned}$$

usando il fattore $(-1)^n$ per cambiare i segni degli n fattori del prodotto si ha la forma finale e massimamente semplificata dell'espansione di Weierstrass, cioè

$$\text{☮}_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcolino i primi otto coefficienti non nulli della serie di Laurent della funzione

$$\text{⌂}(z) = \frac{z}{\operatorname{senh}(z)}\,,$$

centrata in $z = i\pi$ e convergente in $z_c = e^{i\pi/4}$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Il punto $z = i\pi$ è un polo semplice della funzione $\text{⌂}(z)$, ne consegue che la parte principale della serie di Laurent centrata in questo punto ha un solo termine, ovvero che i coefficienti con indici minori di -1 sono nulli.
Usiamo la serie di Taylor della funzione seno iperbolico centrata in $z = i\pi$, a tal fine, riscriviamo la funzione nella forma

$$\text{⌂}(z) = \frac{z - i\pi + i\pi}{\operatorname{senh}(z - i\pi + i\pi)} = \frac{z - i\pi + i\pi}{-\operatorname{senh}(z - i\pi)} = -\frac{i\pi}{\operatorname{senh}(z - i\pi)} - \frac{z - i\pi}{\operatorname{senh}(z - i\pi)} \equiv f_1(z) + f_2(z)\,,$$

dove abbiamo definito le funzioni

$$f_1(z) = -\frac{i\pi}{\operatorname{senh}(z - i\pi)}\,, \qquad f_2(z) = -\frac{z - i\pi}{\operatorname{senh}(z - i\pi)}\,.$$

La funzione $\text{⌂}(z)$ è meromorfa, ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$. L'origine rappresenta una singolarità eliminabile. Il polo semplice più vicino a $z_1 = i\pi$, centro dello sviluppo di Laurent che si sta considerando, è $z_2 = 2i\pi$, si ha quindi che la corona circolare in cui converge la prima serie di Laurent è quella centrata in $z_1 = i\pi$, con raggio interno nullo ed esterno pari a $|z_1 - z_2| = \pi$, che definiamo come $C_{0,\pi}(i\pi) = \{z : 0 < |z - i\pi| < \pi\}$. Il punto z_c in cui si richiede la convergenza appartiene a questa corona circolare, infatti:

$$0 < |z_c - i\pi| = \left|e^{i\pi/4} - i\pi\right| = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \pi\right)^2\right]^{1/2} = \left[1 + \pi^2 - \sqrt{2}\pi\right]^{1/2} = \pi\underbrace{\left[1 + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\left(1 - \sqrt{2}\pi\right)}_{<0}\right]^{1/2}}_{<1} < \pi\,.$$

Consideriamo la funzione $f_1(z)$, nel limite $z \to i\pi$, usando la serie di Taylor della funzione seno iperbolico e la somma della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= -\frac{i\pi}{\sum_{j=0}^{\infty}(z - i\pi)^{2j+1}/(2j+1)!} = -\frac{i\pi}{z - i\pi}\,\frac{1}{1 + (z - i\pi)^2/3! + (z - i\pi)^4/5! + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)} \\
&= -\frac{i\pi}{z - i\pi}\left(1 - \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right] + \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right]^2\right. \\
&\qquad \left. - \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right]^3 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Poiché le potenze del binomio $(z - i\pi)$ che compaiono nel termine in parentesi tonde sono pari o nulle, la serie di Laurent della funzione $f_1(z)$ avrà solo potenze dispari. La serie di Laurent della funzione $f_2(z)$, che, a parte una costante, differisce dalla funzione $f_1(z)$ per un fattore $(z - i\pi)$, in particolare si ha

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi} f_1(z)(z - i\pi)$$

non avrà la parte principale, è infatti analitica in $z_1 = i\pi$. La parte regolare della serie conterrà, oltre alla costante, solo potenze pari. Ne consegue che i primi otto coefficienti non nulli, richiesti dal problema, saranno quelli con indici che vanno da -1 e 6. I quattro con indici: -1, 0, 1 e 3 si ottengono dai coefficienti della funzione $f_1(z)$
Calcoliamo i primi coefficienti della serie di Laurent della funzione $f_1(z)$ a partire dall'espressione della stessa ottenuta precedentemente. Raccogliendo i termini nelle stesse potenze del binomio $(z - i\pi)$ si ha

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= -\frac{i\pi}{z - i\pi}\left(1 - \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right] + \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right]^2\right. \\
&\qquad \left. - \left[\frac{(z - i\pi)^2}{3!} + \frac{(z - i\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^6\right)\right]^3 + \cdots\right) \\
&= -\frac{i\pi}{z - i\pi} - (z - i\pi)i\pi\left(-\frac{1}{3!}\right) - (z - i\pi)^3 i\pi\left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) - (z - i\pi)^5 i\pi\left(-\frac{1}{7!} + \frac{2}{3!5!} - \frac{1}{(3!)^3}\right) + \mathcal{O}\left((z - i\pi)^7\right),
\end{aligned}$$

dove i primi termini dei coefficienti in parentesi tonde: $-1/3!$, $-1/5!$ e $-1/7!$, provengono dal primo termine in parentesi quadra; i secondi: $1/(3!)^2$ e $2/(3!5!)$ dal quadrato del secondo termine in parentesi quadrata; il terzo:

$-1/(3!)^3$ deriva dal cubo del terzo termine in parentesi quadra. Indicando con $\left\{C_k^{(j)}\right\}_{k=-2+j}^{\infty}$ la successione dei coefficienti di Laurent della funzione $f_j(z)$, $j=1,2$, i coefficienti così ottenuti sono

$$C_{-1}^{(1)} = -i\pi\,, \qquad C_1^{(1)} = \frac{i\pi}{6}\,, \qquad C_3^{(1)} = -i\pi\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right) = -\frac{7i\pi}{360}\,, \qquad C_5^{(1)} = -i\pi\left(-\frac{1}{7!}+\frac{2}{3!5!}-\frac{1}{(3!)^3}\right) = \frac{31i\pi}{15120}\,,$$

mentre $C_{2n}^{(1)} = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dalla relazione

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi} f_1(z)(z - i\pi)\,,$$

si ottengono i quattro coefficienti di Laurent della funzione $f_2(z)$, che sono

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{i\pi}C_{-1}^{(1)} = -1\,, \qquad C_2^{(2)} = \frac{1}{i\pi}C_1^{(1)} = \frac{1}{6}\,, \qquad C_4^{(2)} = \frac{1}{i\pi}C_3^{(1)} = -\frac{7}{360}\,, \qquad C_6^{(1)} = \frac{1}{i\pi}C_5^{(1)} = \frac{31}{15120}\,,$$

con $C_{2n-1}^{(2)} = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Per l'unicità degli sviluppi in serie, i coefficienti della serie di Laurent della funzione completa

$$\text{⌂}(z) = f_1(z) + f_2(z)\,,$$

verificano la stessa relazione che lega le funzioni $\text{⌂}(z)$, $f_1(z)$ e $f_2(z)$. Indicando con $\{C_k\}_{k=-1}^{\infty}$ la successione dei coefficienti di Laurent della funzione $\text{⌂}(z)$, si ha che i primi otto non nulli sono

$$C_{-1} = C_{-1}^{(1)} + C_{-1}^{(2)} = C_{-1}^{(1)} = -i\pi\,; \qquad C_0 = C_0^{(1)} + C_0^{(2)} = C_0^{(2)} = -1\,; \qquad C_1 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)} = C_1^{(1)} = \frac{i\pi}{6}\,;$$

$$C_2 = C_2^{(1)} + C_2^{(2)} = C_2^{(2)} = \frac{1}{6}\,; \qquad C_3 = C_3^{(1)} + C_3^{(2)} = C_3^{(1)} = -\frac{7i\pi}{360}\,; \qquad C_4 = C_4^{(1)} + C_4^{(2)} = C_4^{(2)} = -\frac{7}{360}\,;$$

$$C_5 = C_5^{(1)} + C_5^{(2)} = C_5^{(1)} = \frac{31i\pi}{15120}\,; \qquad C_6 = C_6^{(1)} + C_6^{(2)} = C_6^{(2)} = \frac{31}{15120}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che la matrice A, che rappresenta rispetto alla base canonica l'operatore $\hat{A}$ definito in uno spazio di Hilbert tridimensionale, è

$$\hat{A} \hookleftarrow A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+5i & 0 & -1+i \\ 0 & 4+2i & 0 \\ -1+i & 0 & 1+5i \end{pmatrix},$$

si calcoli la norma dell'operatore

$$\hat{B} = \hat{A} - e^{\hat{A}}\,.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'operatore $\hat{A}$ è normale, infatti si hanno

$$AA^\dagger = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+5i & 0 & -1+i \\ 0 & 4+2i & 0 \\ -1+i & 0 & 1+5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-5i & 0 & -1-i \\ 0 & 4-2i & 0 \\ -1-i & 0 & 1-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^\dagger A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-5i & 0 & -1-i \\ 0 & 4-2i & 0 \\ -1-i & 0 & 1-5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+5i & 0 & -1+i \\ 0 & 4+2i & 0 \\ -1+i & 0 & 1+5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene l'annullamento del commutatore delle matrici che implica l'annullamento di quello degli operatori, cioè

$$\left[A, A^\dagger\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = 0.$$

Anche l'operatore $\hat{B}$ è normale, come conseguenza dalle sua definizione e dalla normalità dell'operatore $\hat{A}$. La norma di un operatore normale coincide con il valore dei moduli dei suoi autovalori. Ovvero indicando con $\sigma_d(\hat{B}) = \{\beta_k\}_{k=1}^3$ lo spettro discreto dell'operatore $\hat{B}$, si ha

$$\left\|\hat{B}\right\| = \max_{k\in\{1,2,3\}} \{|\beta_k|\} \, .$$

Inoltre, essendo diagonalizzabile, in quanto normale, l'operatore $\hat{A}$ verifica il teorema spettrale, quindi, indicandone con $\sigma_d(\hat{A}) = \{\alpha_k\}_{k=1}^3$ lo spettro discreto, si ha che gli autovalori dei due operatori sono legati dalla relazione

$$\beta_k = \alpha_k - e^{\alpha_k} \, , \qquad \forall\, k \in \{1,2,3\} \, .$$

Otteniamo gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(A - \alpha I) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1+5i-2\alpha & 0 & -1+i \\ 0 & 4+2i-2\alpha & 0 \\ -1+i & 0 & 1+5i-2\alpha \end{pmatrix} = 0$$
$$(4+2i-2\alpha)\left[(1+5i-2\alpha)^2 - (-1+i)^2\right] = 0 \, ,$$

da cui

$$\alpha_1 = 2+i \, , \qquad \alpha_{2,3} = \frac{1+5i \mp (-1+i)}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ 3i \end{cases}$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{B}$ sono

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2+i-e^{2+i} = 2-e^2\cos(1) + i\left(1-e^2\,\mathrm{sen}(1)\right) , \\ \beta_2 &= 1+2i-e^{1+2i} = 1-e\cos(2) + i\,(2-e\,\mathrm{sen}(2)) \, , \\ \beta_3 &= 3i-e^{3i} = -\cos(3) + i\,(3-\mathrm{sen}(3)) \, . \end{aligned}$$

Le espressioni simboliche e le stime numeriche dei moduli quadri degli autovalori sono

$$\begin{aligned} |\beta_1|^2 &= \left(2-e^2\cos(1)\right)^2 + \left(1-e^2\,\mathrm{sen}(1)\right)^2 = 5+e^4-2e^2\,(2\cos(1)+\mathrm{sen}(1)) \simeq 31,2 \, , \\ |\beta_2|^2 &= (1-e\cos(2))^2 + (2-e\,\mathrm{sen}(2))^2 = 5+e^2-2e\,(\cos(2)+2\,\mathrm{sen}(2)) \simeq 4,8 \, , \\ |\beta_3|^2 &= \cos^2(3) + (3-\mathrm{sen}(3))^2 = 10-6\,\mathrm{sen}(3) \simeq 9,2 \, . \end{aligned}$$

La norma dell'operatore $\hat{B}$ è

$$\left\|\hat{B}\right\| = |\beta_1| = \sqrt{5+e^4-2e^2\,(2\cos(1)+\mathrm{sen}(1))} \simeq 5,6 \, .$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'operatore normale e regolare $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert a $n \in \mathbb{N}$ dimensioni H_n e si indichi con $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ l'insieme degli autovalori ovvero lo spettro discreto dell'operatore.
Si dimostri che l'operatore risolvente $\hat{A}_\alpha$ esiste $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, tale che $|\alpha| > |\alpha_k|$, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}$.
Nel caso in cui l'operatore $\hat{A}$ sia definito in uno spazio di Hilbert bidimensionale e abbia, rispetto alle base canonica, la rappresentazione matriciale

$$\hat{A} \hookleftarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} ,$$

si ottenga la matrice A_α, che rappresenta, rispetto alla stessa base, l'operatore risolvente $\hat{A}_\alpha$.

Soluzione del quinto problema

L'operatore risolvente di $\hat{A}$ è definito come

$$\hat{A}_\alpha = \left(\hat{I}\alpha - \hat{A}\right)^{-1} ,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Mettendo in evidenza lo scalare α e considerando soddisfatta la condizione di convergenza, possiamo interpretare questo operatore come la somma della serie geometrica di ragione $\hat{A}\alpha^{-1}$ moltiplicata per α^{-1}, ovvero

$$\hat{A}_\alpha = \left(\hat{I}\alpha - \hat{A}\right)^{-1} = \alpha^{-1}\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)^{-1} = \alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k .$$

Si noti che, dalla condizione di regolarità e cioè di invertibilità dell'operatore, segue che lo spettro discreto non contiene lo zero e quindi, il considerare valori α, tali che $|\alpha| > |\alpha_k|$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ne garantisce la non nullità, si ha $\alpha \neq 0$. La condizione di convergenza è che la ragione abbia norma strettamente minore dell'unità, cioè: $\left\|\hat{A}\right\| < |\alpha|$. Verifichiamo l'ultima identità della precedente relazione, proviamo cioè che la serie converge all'operatore $\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)^{-1}$. Indichiamo genericamente con l'operatore $\hat{S}$ la somma della serie

$$\hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k ,$$

facciamo agire su ambo i membri da sinistra l'operatore $\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)$, si ha

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)\hat{S} = \left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k \\
&\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)\hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^{k+1} \\
&\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)\hat{S} = \hat{I} + \hat{A}\alpha^{-1} + \left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^2 + \cdots - \left(\hat{A}\alpha^{-1} + \left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^2 + \left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^3 + \cdots\right) \\
&\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)\hat{S} = \hat{I} ,
\end{aligned}$$

facciamo agire lo stesso operatore ma da destra, si ha

$$\begin{aligned}
\hat{S}\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right) \\
\hat{S}\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^{k+1} \\
\hat{S}\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right) &= \hat{I} ,
\end{aligned}$$

le due precedenti identità finali rappresentano la definizione dell'operatore inverso di $\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)$, per cui si ha

$$\left(\hat{I} - \hat{A}\alpha^{-1}\right)^{-1} = \hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\hat{A}\alpha^{-1}\right)^k ,$$

come volevasi dimostrare. La condizione di convergenza e quindi di esistenza dell'operatore risolvente, che può essere definito in termini dell'operatore $\hat{S}$ come $\hat{A}_\alpha = \alpha^{-1}\hat{S}$ è $\left\|\hat{A}\right\| < |\alpha|$. Ma, per un operatore normale la norma coincide con il massimo valore dei moduli degli autovalori, quindi la condizione di convergenza diventa

$$|\alpha| > \left\|\hat{A}\right\| = \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\left|\alpha_j\right|\right\} \geq |\alpha_k| , \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} .$$

Abbiamo ottenuto la dimostrazione richiesta.
Calcoliamo gli autovalori nel caso particolare proposto dal problema. Risolviamo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(A - I\alpha) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} 2-\alpha & -2 \\ -2 & -1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\
\alpha^2 - \alpha - 6 &= 0 ,
\end{aligned}$$

da cui si hanno $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 3$. Le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori si ottengono come soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 2-\alpha_j & -2 \\ -2 & -1-\alpha_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove v_j^k indica la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j \in \{1,2\}$. Ponendo $v_{1,2}^1 = v$ si ha che le seconde componenti sono

$$v_j^2 = v\frac{2-\alpha_j}{2} = \begin{cases} 2v & j=1 \\ \\ -v/2 & j=2 \end{cases} .$$

Gli autovettori sono

$$v_1 = \frac{1}{|v|\sqrt{5}}\begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} = \{v=1\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{|v|\sqrt{5/4}}\begin{pmatrix} v \\ -v/2 \end{pmatrix} = \{v=2\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante è

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ed è tale che

$$U^\dagger A U = A_d = \operatorname{diag}(-2,3) .$$

L'operatore risolvente $\hat{A}_\alpha = \left(\hat{I}\alpha - \hat{A}\right)^{-1}$ ha, rispetto alla base degli autovettori dell'operatore $\hat{A}$, che, per il teorema spettrale, sono anche suoi autovettori, la rappresentazione diagonale

$$\hat{A}_\alpha \overset{v}{\longleftrightarrow} (A_\alpha)_d = (I\alpha - A_d)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_1}, \frac{1}{\alpha-\alpha_1}\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha-3}\right).$$

La rappresentazione rispetto alla base canonica si ottiene usando la matrice unitaria diagonalizzante U, ovvero

$$\begin{aligned} \hat{A}_\alpha \longleftrightarrow A_\alpha = U(A_\alpha)_d U^\dagger &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(\alpha+2) & 0 \\ 0 & 1/(\alpha-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1/(\alpha+2) & 2/(\alpha-3) \\ 2/(\alpha+2) & -1/(\alpha-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1/(\alpha+2)+4/(\alpha-3) & 2/(\alpha+2)-2/(\alpha-3) \\ 2/(\alpha+2)-2/(\alpha-3) & 4/(\alpha+2)+1/(\alpha-3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

infine, si ha

$$A_\alpha = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-3)}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -2 \\ -2 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{👻} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\Gamma^{-1}(x)\right) x\,dx ,$$

dove $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac e $\Gamma(z)$ e la funzione gamma di Eulero.

Soluzione del sesto Problema

In generale, se la funzione argomento della delta di Dirac ha solo zeri semplici nei punti $\{x_x\}_{k\in\Omega} \subset \mathbb{R}$, dove $\Omega \subset \mathbb{N}$ è un insieme numerabile e intorno agli zeri è analitica, si ha

$$\text{👻} = \sum_{k\in\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-x_k)}{|d\Gamma^{-1}/dx|} x\,dx .$$

Poiché la funzione gamma di Eulero è meromorfa e ha come singolarità solo poli semplici nei punti della successione $\{-k\}_{k=0}^{\infty}$, la funzione inversa è intera e ha negli stessi punti zeri semplici. Ne consegue che

$$\text{👻} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x+k)}{|d\Gamma^{-1}/dx|} x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-k}{|d\Gamma^{-1}/dx|_{-k}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{|d\Gamma^{-1}/dx|_{-k}} .$$

Per calcolare le derivate della funzione $\Gamma^{-1}(z)$ usiamo lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$\Gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(z+j)} + \phi(z)\,.$$

Si ottiene dalla rappresentazione

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\,,$$

convergente in $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, separando l'intervallo d'integrazione come $[0,\infty) = [0,1] \cup (1,\infty)$ e usando lo sviluppo in serie di Taylor per la funzione esponenziale, ovvero

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}_{=\phi(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^1 t^{z+j-1} dt + \phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{z+j} + \phi(z)\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ è intera.
La derivata della funzione $\Gamma^{-1}(x)$ scritta in termini dello sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\frac{d\Gamma^{-1}}{dx} = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(x+j)^2} - \phi'(x) \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(x+l)} + \phi(x) \right)^{-2}\,.$$

Nei punti della successione $\{-k\}_{k=0}^{\infty}$ si hanno

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\Gamma^{-1}}{dx}\right|_{-k} &= -\lim_{x\to k} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} = \lim_{x\to -k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(x+j)^2} - \phi'(x) \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(x+l)} + \phi(x) \right)^{-2} \\ &= \lim_{x\to -k} \left(\frac{(-1)^k}{k!(x+k)^2} \right) \left(\frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \right)^{-2} = (-1)^k k!\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \end{aligned}$$

Usiamo questo risultato per ottenere il valore dell'integrale cercato come serie di Taylor dell'opposto della funzione esponenziale con esponente nullo, cioè

$$\text{👻} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{|d\Gamma^{-1}/dx|_{-k}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = -\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} = -e\,.$$