Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 17 gennaio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Data la funzione

$$f(\alpha) = \oint_{|z|=1} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(z\alpha)}{\cosh(z\alpha)}\right)\frac{dz}{z}\,,$$

si calcoli $f'(3)$, ovvero il valore della sua derivata prima in $\alpha = 3$.
Suggerimento. Si usi come derivata dell'integrale l'integrale della derivata, ovvero si assuma la liceità del passaggio della derivazione sotto il segno di integrale.

Soluzione del primo problema

Alla luce del suggerimento si ha

$$f'(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}(\alpha) = \oint_{|z|=1} \frac{d}{d\alpha}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(z\alpha)}{\cosh(z\alpha)}\right)\frac{dz}{z}\,.$$

Con il cambiamento di variabile $z \to w = z\alpha$ l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\alpha}(\alpha) &= \oint_{|w|=|\alpha|} \frac{1}{w}\frac{dw}{d\alpha}\frac{d}{dw}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{\cosh(w)}\right)dw = \oint_{|w|=|\alpha|} \frac{1}{w}z\frac{d}{dw}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{\cosh(w)}\right)dw \\
&= \oint_{|w|=|\alpha|} \frac{1}{w}\frac{w}{\alpha}\frac{d}{dw}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{\cosh(w)}\right)dw = \frac{1}{\alpha}\oint_{|w|=|\alpha|} \frac{d}{dw}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{\cosh(w)}\right)dw \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\oint_{|w|=|\alpha|}\frac{d}{dw}\ln(\operatorname{sen}(w))\,dw - \oint_{|w|=|\alpha|}\frac{d}{dw}\ln(\cosh(w))\,dw\right).
\end{aligned}$$

Avendo delle derivate logaritmiche, possiamo applicare il teorema dell'indice, per cui si ha

$$\frac{df}{d\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\oint_{|w|=|\alpha|}\frac{d}{dw}\ln(\operatorname{sen}(w))\,dw - \oint_{|w|=|\alpha|}\frac{d}{dw}\ln(\cosh(w))\,dw\right) = \frac{2i\pi}{\alpha}(N_s - N_c)\,,$$

dove N_s e N_c sono rispettivamente i numeri di zeri che le funzioni $\operatorname{sen}(w)$ e $\cosh(w)$ hanno nel disco di raggio $|\alpha|$, centrato nell'origine del piano complesso w. Gli insiemi degli zeri sono: $\{s_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, per la funzione seno e $\{c_k = (j+1/2)i\pi\}_{j\in\mathbb{Z}}$ per la funzione coseno iperbolico. Nel caso specificato dal problema, si ha $\alpha = 3$, ne consegue che sono da considerarsi il solo zero $s_0 = 0$ della funzione seno e i due $c_{-1} = -i\pi/2$ e $c_0 = i\pi/2$ della funzione coseno iperbolico, in quanto sono gli unici zeri contenuti nel disco di raggio $\alpha = 3$. Ne consegue che il valore richiesto è

$$f'(3) = \left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha=3} = -\frac{2i\pi}{3}\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$g(z) = \frac{1}{e^{2z} + 2e^z + 2}\,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Ha un'infinità di poli che quindi si accumulano all'infinito e coincidono con gli zeri della funzione a denominatore, che si ottengono come soluzioni dell'equazione $e^{2z} + 2e^z + 2 = 0$. Indicando con $\{z_k^+, z_k^-\}_{k\in\mathbb{Z}}$ l'insieme di questi poli, si ha

$$e^{z_k^\pm} = -1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm 3i\pi/4 + 2ik\pi} = e^{\ln(2)/2 + i\pi(2k \pm 3/4)} \qquad \Rightarrow \qquad z_k^\pm = \frac{\ln(2)}{2} + i\pi\left(2k \pm \frac{3}{4}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Sono zeri semplici della funzione a denominatore e quindi poli semplici di $g(z)$. Ciò si deduce dal fatto che in $z = z_k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, la derivata prima della funzione a denominatore è diversa da zero, infatti

$$\frac{d}{dz}\left(e^{2z} + 2e^z + 2\right)\bigg|_{z=z_k^\pm} = 2e^{2z_k^\pm} + 2e^{z_k^\pm} = 2(-1 \pm i)^2 - 2 \pm 2i = -2 \mp 2i \neq 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

I residui dei poli dell'insieme $\{z_k^+, z_k^-\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono

$$R_k^\pm = \mathrm{Res}\left[g(z), z_k^\pm\right] = \lim_{z\to z_k^\pm} \left(z - z_k^\pm\right) g(z) = \lim_{z\to z_k^\pm} \frac{1}{2e^{2z} + 2e^z} = \frac{1}{2(-1 \mp i)} = \frac{-1 \pm i}{4} = \frac{e^{\pm 3i\pi/4}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler, indicando con $\phi(z)$ la parte intera della funzione $g(z)$ che definiremo in seguito, è

$$\begin{aligned}
g(z) &= \phi(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{R_k^+}{z - z_k^+} + \frac{R_k^-}{z - z_k^-}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{3i\pi/4}}{z - \ln(2)/2 - 2ik\pi - 3i\pi/4} + \frac{e^{-3i\pi/4}}{z - \ln(2)/2 - 2ik\pi + 3i\pi/4}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ik\pi - 3\pi/(2\sqrt{2})}{(z - \ln(2)/2 - 2ik\pi)^2 + 9\pi^2/16} \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2})}{(z - \ln(2)/2)^2 + 9\pi^2/16} \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}ik\pi}{(z - \ln(2)/2 - 2ik\pi)^2 + 9\pi^2/16} + \frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}ik\pi}{(z - \ln(2)/2 + 2ik\pi)^2 + 9\pi^2/16}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2})}{(z - \ln(2)/2)^2 + 9\pi^2/16} \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}ik\pi}{(z - \ln(2)/2)^2 - 4k^2\pi^2 + 9\pi^2/16 - 4ik\pi(z - \ln(2)/2)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{-\sqrt{2}z + \ln(2)/\sqrt{2} - 3\pi/(2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}ik\pi}{(z - \ln(2)/2)^2 - 4k^2\pi^2 + 9\pi^2/16 + 4ik\pi(z - \ln(2)/2)}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a(z)}{b_0(z)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a(z) + 2\sqrt{2}ik\pi}{b_k(z) - 4ik\pi(z - \ln(2)/2)} + \frac{a(z) - 2\sqrt{2}ik\pi}{b_k(z) + 4ik\pi(z - \ln(2)/2)}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{a(z)}{b_0(z)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a(z)b_k(z) - 8\sqrt{2}k^2\pi^2(z - \ln(2)/2)}{b_k^2(z) + 16k^2\pi^2(z - \ln(2)/2)^2}\right),
\end{aligned}$$

dove, per economia di notazione, abbiamo introdotto le funzioni

$$a(z) = -\sqrt{2}z + \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\,, \qquad b_k(z) = \left(z - \frac{\ln(2)}{2}\right)^2 - 4k^2\pi^2 + \frac{9\pi^2}{16}\,.$$

Poiché

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} \phi(z) \neq \infty\,,$$

ovvero, avendo che la funzione $g(z)$ non ha singolarità all'infinito, la parte intera $\phi(z)$ è costante. Il suo valore, indicato con ϕ_0, può essere calcolato valutando la funzione $g(z)$ ad esempio nell'origine $z = 0$, cioè

$$\begin{aligned}\phi_0 &= g(0) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a(0)}{b_0(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a(0)b_k(0) + 4\sqrt{2}\,k^2\pi^2\ln(2)}{b_k^2(0) + 4k^2\pi^2\ln^2(2)}\right)\\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{a(0)}{b_0(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a(0)b_k(0) + 4\sqrt{2}\,k^2\pi^2\ln(2)}{b_k^2(0) + 4k^2\pi^2\ln^2(2)}\right).\end{aligned}$$

In definitiva

$$g(z) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a(z)}{b_0(z)} - \frac{a(0)}{b_0(0)}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a(z)b_k(z) - 8\sqrt{2}\,k^2\pi^2\,(z - \ln(2)/2)}{b_k^2(z) + 16k^2\pi^2\,(z - \ln(2)/2)^2} - \frac{a(0)b_k(0) + 4\sqrt{2}k^2\pi^2\ln(2)}{b_k^2(0) + 4k^2\pi^2\ln^2(2)}\right).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcolino i coefficienti della serie di Laurent della funzione

$$t(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}\,,$$

con centro nel punto $z = 7$ e convergente nell'origine $z = 0$.

Soluzione del terzo problema

La funzione $t(z)$ e meromorfa, ha due poli semplici nei punti $z_\pm = -1 \pm i = \sqrt{2}\,e^{\pm 3i\pi/4}$, che sono gli zeri semplici del polinomio di secondo grado che ne rappresenta il denominatore. Riscriviamo la funzione come somma degli inversi di polinomi di primo grado, ovvero ne consideriamo lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$t(z) = \frac{1}{z_+ - z_-}\left(\frac{1}{z - z_+} - \frac{1}{z - z_-}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z + 1 - i} - \frac{1}{z + 1 + i}\right).$$

Il centro dello sviluppo di Laurent richiesto dal problema è il punto $z = 7$, che non è una singolarità ed è equidistante dalle uniche due singolarità della funzione, i poli z_+ e z_-, infatti: $|z_+ - 7| = |-8 + i| = |z_- - 7| = |-8 - i| = \sqrt{65}$. Si hanno quindi due serie di Laurent con centro in $z = 7$, quella convergente nel disco $D = \left\{z : |z - 7| < \sqrt{65}\right\}$ e quella che ha come dominio di convergenza la corona circolare $C = \left\{z : \sqrt{65} < |z - 7| < \infty\right\}$. Poiché l'origine appartiene al disco D, infatti $|0 - 7| = 7 < \sqrt{65}$, i coefficienti da calcolare sono quelli della serie di Laurent in esso convergente. Riscriviamo la funzione sommando e sottraendo 7 a denominatore dei due termini e mettendo in evidenza rispettivamente $8 - i$ e $8 + i$, sempre a denominatore del primo e secondo termine, si ha

$$t(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - 7 + 8 - i} - \frac{1}{z - 7 + 8 + i}\right). = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{8 - i}\frac{1}{(z - 7)/(8 - i) + 1} - \frac{1}{8 + i}\frac{1}{(z - 7)/(8 + i) + 1}\right).$$

I secondi fattori dei due termini sono le somme delle due serie geometriche

$$\frac{1}{(z - 7)/(8 - i) + 1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z - 6}{8 - i}\right)^k, \qquad \frac{1}{(z - 7)/(8 + i) + 1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z - 6}{8 + i}\right)^k,$$

che convergono in D poiché i moduli delle ragioni verificano la condizione

$$\left|\frac{z - 7}{8 \pm i}\right| = \frac{|z - 7|}{\sqrt{65}} < 1\,,$$

che vale $\forall\, z$ tale che: $|z - 7| < \sqrt{65}$, ovvero: $\forall\, z \in D$. Usando le serie geometriche si ha

$$t(z) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(8 - i)^{k+1}} - \frac{1}{(8 + i)^{k+1}}\right)(z - 7)^k.$$

Con le rappresentazioni polari dei numeri $8 \pm i$, che sono: $8 \pm i = |8 \pm i| r^{i \arg(8 \pm i)} = \sqrt{65}\, e^{\pm i \arctan(1/8)}$, dove si è considerata la determinazione principale $[-\pi, \pi]$, l'espressione precedente diventa

$$t(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{65^{(k+1)/2}} \left(e^{i(k+1)\arctan(1/8)} - e^{-i(k+1)\arctan(1/8)} \right) (z-7)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sen}[(k+1)\arctan(1/8)]}{65^{(k+1)/2}} (z-7)^k .$$

L'insieme dei coefficienti di Laurent richiesto dal problema è

$$\left\{ \frac{(-1)^k \operatorname{sen}[(k+1)\arctan(1/8)]}{65^{(k+1)/2}} \right\}_{k=0}^{\infty} .$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$J(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2} .$$

Soluzione del quarto problema

La trasformata di Fourier è data dall'integrale

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + ix + 2} dx ,$$

che può essere calcolato usando il lemma di Jordan. Infatti, la funzione data, estesa al piano complesso z, verifica la condizione di convergenza uniforme

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2 + iz + 2} \overset{\text{U.}}{=} 0 .$$

Possiede, inoltre, due poli semplici nei punti $z_1 = i$ e $z_2 = -2i$. Quindi, chiudendo il percorso d'integrazione nel semipiano della parti immaginarie positive se $k < 0$ o negative se invece $k > 0$, come prescritto dal lemma di Jordan, si devono considerare rispettivamente il residuo in z_1 o quello in z_2. In dettaglio, usando i due percorsi chiusi

$$\Gamma_R^+ = \left\{ z : z = Re^{i\theta}\ \theta \in [0, \pi] \right\} \cup [-R, R] , \qquad \Gamma_R^- = -\left\{ z : z = Re^{i\theta}\ \theta \in [-\pi, 0] \right\} \cup [-R, R] ,$$

dove il segno meno indica che la semicirconferenza è orientata in senso negativo, cioè orario, si ha

$$\tilde{f}(k) = \lim_{R \to \infty} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + iz + 2} dz = i\sqrt{2\pi}\, \operatorname{Res}[f(z), z_1 = i] = i\sqrt{2\pi} \frac{e^{-ikz_1}}{z_1 - z_2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} e^{k} & k < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + iz + 2} dz = -i\sqrt{2\pi}\, \operatorname{Res}[f(z), z_2 = -2i] = -i\sqrt{2\pi} \frac{e^{-ikz_2}}{z_2 - z_1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} e^{-2k} & k > 0 \end{cases} ,$$

con

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + iz + 2} .$$

In definitiva, usando la funzione a gradino $\theta(k)$ di Heaviside, si ha la trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \left(\theta(k) e^{-2k} + \theta(-k) e^{k} \right).$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dopo aver calcolato gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ottenga la matrice

$$Y_n = X^{2n+1} - X\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L'equazione secolare per la matrice X nella variabile λ è

$$\begin{aligned} \det(X - I\lambda) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -(1-\lambda)^3(1+\lambda) + (1-\lambda)(1+\lambda) &= 0 \\ (1-\lambda)(1+\lambda)\left[-(1-\lambda)^2 + 1\right] &= 0\,, \end{aligned}$$

le soluzioni e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_2 = 0\,, \qquad \lambda_3 = 1\,, \qquad \lambda_4 = 2\,.$$

Poiché la matrice è hermitiana e gli autovalori sono distinti, gli autovettori sono ortogonali. Le componenti degli stessi sono le soluzioni non banali dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_k & 0 & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda_k & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1-\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix} = 0\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

Per le componenti x_1 e w_1 del primo autovettore, con autovalore $\lambda_1 = -1$, si hanno le due equazioni

$$2x_1 + iw_1 = 0\,, \qquad x_1 + 2iw_1 = 0\,,$$

ovvero $x_1 = w_1 = 0$. Quindi, posto $y_2 = 0$, il primo autovettore è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo autovettore, con autovalore $\lambda_2 = 0$, poniamo $y_2 = z_2 = 0$, mentre le componenti x_2 e w_2 sono determinate dall'equazione

$$x_2 + iw_2 = 0\,,$$

ne consegue che, posto $x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Nel caso del terzo autovettore, avente autovalore $\lambda_3 = 1$, si ha $x_3 = z_3 = w_3 = 0$, quindi

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine il quarto autovettore, con $\lambda_4 = 2$, ha $y_4 = z_4 = 0$, mentre la prima e quarta componente verificano l'equazione

$$-x_4 + i w_4 = 0$$

quindi, ponendo anche in questo caso $x_4 = 1/\sqrt{2}$,

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Con gli autovettori ortonormali così ottenuti è possibile definire la matrice unitaria diagonalizzante come

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dal teorema spettrale segue che la rappresentazione diagonale della matrice Y_n, che indichiamo con $(Y_n)_d$, si ottiene usando nella definizione la rappresentazione diagonale della matrice X, ovvero

$$\begin{aligned} (Y_n)_d &= (\mathrm{diag}(-1,0,1,2))^{2n+1} - \mathrm{diag}(-1,0,1,2) \\ &= \mathrm{diag}\left(-1,0,1,2^{2n+1}\right) - \mathrm{diag}(-1,0,1,2) \\ &= \mathrm{diag}\left(0,0,0,2^{2n+1}-2\right). \end{aligned}$$

Ne consegue che, sempre usando il teorema spettrale, la rappresentazione canonica Y_n è

$$\begin{aligned} Y_n &= U (Y_n)_d U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2n+1}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(2^{2n+1}-2\right)/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\left(2^{2n+1}-2\right)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

in definitiva

$$Y_n = \begin{pmatrix} 2^{2n}-1 & 0 & 0 & i(2^{2n}-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i(2^{2n}-1) & 0 & 0 & 2^{2n}-1 \end{pmatrix}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{K}$ è definito nello spazio vettoriale $L^2([0,\pi])$, ovvero quello delle funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $[0,\pi]$. La sua azione su una generica funzione $f(x) \in L^2([0,\pi])$ è data dall'integrale

$$(\hat{K} f)(x) = \int_0^\pi \mathrm{sen}(x+y) e^{i(x+y)/2} f(y) dy.$$

Si ottengano gli autovalori e le auto-funzioni dell'operatore $\hat{K}$.

Soluzione del sesto Problema

L'equazione agli autovalori è

$$(\hat{K}f)(x) = \lambda f(x)$$
$$\int_0^\pi \mathrm{sen}(x+y)e^{i(x+y)/2} f(y)dy = \lambda f(x)\,.$$

È un'equazione integrale di Fredholm omogenea con il nucleo separabile, infatti

$$\mathrm{sen}(x+y)e^{i(x+y)/2} = \mathrm{sen}(x)\cos(y)e^{i(x+y)/2} + \cos(x)\mathrm{sen}(y)e^{i(x+y)/2} = \sum_{k=1}^{2} M_k(x)N_k(y)\,,$$

con

$$M_1(x) = \mathrm{sen}(x)e^{ix/2}\,, \qquad N_1(x) = \cos(x)e^{ix/2}\,,$$
$$M_2(x) = \cos(x)e^{ix/2}\,, \qquad N_2(x) = \mathrm{sen}(x)e^{ix/2}\,.$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione agli autovalori per $N_j(x)$, con $j = 1, 2$, e integriamo in dx sull'intervallo $[0, \pi]$, si ha

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}(x+y)e^{i(x+y)/2} f(y)dy = \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\int_0^\pi N_j(x)M_k(x)dx}_{=A_{jk}} \underbrace{\int_0^\pi N_k(y)f(y)dy}_{=F_k} = \lambda \underbrace{\int_0^\pi N_j(x)f(x)dx}_{=F_j}\,,$$

ovvero si ha il sistema omogeneo 2×2

$$(A - I\lambda)F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove A e F sono rispettivamente la matrice 2×2 e il vettore 2×1 di elementi

$$A_{jk} = \int_0^\pi N_j(x)M_k(x)dx\,, \qquad F_j = \int_0^\pi N_j(x)f(x)dx\,, \qquad j,k = 1,2\,.$$

In particolare si hanno

$$A_{11} = A_{22} = \int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\cos(x)e^{ix}dx = \frac{1}{4i}\int_0^\pi \left(e^{3ix} - e^{-ix}\right)dx = \frac{2}{3}\,,$$
$$A_{12} = \int_0^\pi \cos^2(x)e^{ix}dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi \left(e^{3ix} + 2e^{ix} + e^{-ix}\right)dx = \frac{2i}{3}\,,$$
$$A_{21} = \int_0^\pi \mathrm{sen}^2(x)e^{ix}dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi \left(e^{3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix}\right)dx = \frac{4i}{3}\,,$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2i/3 \\ 4i/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzione dell'equazione secolare

$$\det(A - I\lambda) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & 2i/3 \\ 4i/3 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 + \frac{8}{9} = 0\,,$$

da cui

$$\lambda_\pm = \pm i\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(1 \pm i\sqrt{2}\right).$$

Le componenti degli autovettori sono invece le soluzioni non banali dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 2/3-\lambda_\pm & 2i/3 \\ 4i/3 & 2/3-\lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1^\pm \\ F_2^\pm \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove con $F_j^\pm$ indichiamo la j-esima componente dell'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_\pm$. Essendo sistemi omogenei, è possibile esprimere le soluzioni non banali come espressioni delle seconde componenti in termini delle prime, lasciando un grado di libertà non vincolato, cioè

$$F_2^\pm=\frac{F_1^\pm(2/3-\lambda_\pm)}{-2i/3}=\begin{cases} F_1^-\dfrac{2i\sqrt{2}/3}{-2i/3}=-\sqrt{2}\,F_1^- & \lambda=\lambda_- \\[2ex] F_1+\dfrac{-2i\sqrt{2}/3}{-2i/3}=\sqrt{2}\,F_1^+ & \lambda=\lambda_+ \end{cases}.$$

Imponendo, infine, la condizione di normalizzazione come vincolo ulteriore, gli autovettori sono

$$F^-=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad F^+=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Le autofunzioni si ottengono dalla stessa equazione integrale, ovvero

$$f_\pm(x)=\frac{1}{\lambda_\pm}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y)e^{i(x+y)/2}f_\pm(y)dy=\frac{1}{\lambda_\pm}\sum_{k=1}^{2}M_k(x)\int_0^\pi N_k(y)f_\pm(y)dy=\frac{1}{\lambda_\pm}\sum_{k=1}^{2}M_k(x)F_k^\pm .$$

Quindi, usando i valori noti delle componenti $F_j^\pm$, con $j=1,2$, si hanno

$$\begin{aligned} f_-(x)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)e^{ix/2}\left(\operatorname{sen}(x)-\sqrt{2}\cos(x)\right),\\ f_+(x)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)e^{ix/2}\left(\operatorname{sen}(x)+\sqrt{2}\cos(x)\right). \end{aligned}$$

In questa forma le autofunzioni non sono normalizzate, infatti le norme al quadrato non sono unitarie,

$$\begin{aligned} \|f_\pm\|^2&=\int_0^\pi |f_\pm(x)|dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+1\right)\int_0^\pi\left(\operatorname{sen}^2(x)\pm2\sqrt{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x)+2\cos^2(x)\right)dx\\ &=\frac{1}{3}\int_0^\pi\left(1+\cos^2(x)\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^\pi\left(1+\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^\pi\left(1+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La normalizzazione può essere fatta moltiplicando le funzioni per l'inverso della radice quadrata della loro norma, cioè

$$\tilde{f}_\pm(x)=\frac{f_\pm(z)}{\sqrt{\|f_\pm\|}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mp i\right)e^{ix/2}\left(\operatorname{sen}(x)\pm\sqrt{2}\cos(x)\right).$$