Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 17 gennaio 2012

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$S = \oint_{C_r} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{1+z} dz$$

con $C_r = \left\{ z : z = re^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi) \right\}$, nei due casi:

- $0 < r < 1$;
- $r > 1$.

. . . .

Soluzione
Con la sostituzione $w = \sqrt{z}$ l'integrale può essere scritto come

$$S = \oint_{C_r} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{1+z} dz = \int_{C'_r} \frac{2}{1+w^2} dw \,,$$

con $C'_r = \left\{ w : w = \sqrt{r}\, e^{i\phi}, \phi \in [0, \pi] \right\}$ che rappresenta la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio $\sqrt{r}$, appartenente al semipiano superiore, $\mathrm{Im}(w) > 0$. L'integranda ha due poli semplici in $w_{1,2} = \pm i$. Chiudiamo il cammino d'integrazione nel piano complesso w includendo anche il segmento reale $[-\sqrt{r}, \sqrt{r}]$, indichiamo tale percorso con $\Gamma_r = C'_r \cup [-\sqrt{r}, \sqrt{r}]$. L'integrale su Γ_r della stessa funzione, che coincide con la somma degli integrali sulla semicirconferenza e sul segmento reale, può essere calcolato con il teorema dei residui, si ha cioè

$$\int_{\Gamma_r} \frac{2}{1+w^2} dw = S + \int_{-\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}[2/(1+w^2), i]\theta(r-1)\,.$$

La funzione $\theta(x)$, reale e a valori reali, è 1 per $x > 0$ e 0 per $x < 0$. Nell'espressione precedente è utilizzata per indicare, in forma compatta, che nel caso in cui $r > 1$, il polo $z = i$ si trova all'interno di Γ_r e quindi l'integrale è dato dal residuo. Se, invece, $r < 1$ l'integranda è analitica nel dominio definito da Γ_r e quindi, per il teorema di Cauchy, l'integrale è nullo. Risolvendo rispetto ad S e svolgendo l'integrale sul segmento reale si ha:

$$\begin{aligned} S &= -2 \int_{-\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} \frac{1}{1+x^2} dx + 4i\pi \,\mathrm{Res}[1/(1+w^2), i]\theta(r-1) \\ &= -4 \arctan(\sqrt{r}) + \theta(r-1)2\pi\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si trovino le espressioni della parte reale e parte immaginaria della funzione $F(w)$ data dalla rappresentazione integrale

$$F(w) = \int_{|z|=1} z^3 w^{1/z^2} \,,$$

con $w \in \mathbb{C}$ e la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario.

. . . .

Soluzione
Riscriviamo l'integrale come:

$$F(w) = \int_{|z|=1} z^3 w^{1/z^2} = \int_{|z|=1} z^3 e^{\ln w/z^2} \,.$$

L'integranda ha solo una singolarità essenziale nell'origine $z = 0$, quindi, applicando il teorema dei residui, si ha

$$F(w) = \int_{|z|=1} z^3 e^{\ln w/z^2} = 2i\pi \text{Res}[z^3 e^{\ln w/z^2}, 0] = 2i\pi\, C_{-1} \,,$$

nell'ultima identità abbiamo usato la corrispondenza tra residuo e coefficiente C_{-1} della serie di Laurent in $z = 0$. La serie di Laurent dell'integranda in $z = 0$ si ottiene dallo sviluppo dell'esponenziale

$$\begin{aligned} z^3 e^{\ln w/z^2} &= z^3 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\ln w}{z^2} \right)^k \right] = z^3 \left[1 + \frac{\ln w}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2 w}{z^4} + \frac{1}{6}\frac{\ln^3 w}{z^6} + \dots \right] \\ &= z^3 + z \ln w + \frac{1}{2}\frac{\ln^2 w}{z} + \frac{1}{6}\frac{\ln^3 w}{z^3} + \dots \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1} = \frac{\ln^2 w}{2} \,. \end{aligned}$$

Da cui la soluzione dell'integrale e quindi l'espressione della funzione $F(w)$

$$F(w) = i\pi \ln^2(w) \,.$$

Posto w in forma polare: $w = |w| e^{i\phi}$, si ha

$$F(w) = i\pi \ln^2(w) = i\pi \left(\ln|w| + i\phi \right)^2 = -2\pi\phi \ln|w| + i\,\pi \left(\ln^2|w| - \phi^2 \right) \,,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \text{Re}[F(w)] &= -2\pi\phi \ln|w| \,, \\ \text{Im}[F(w)] &= \pi \left(\ln^2|w| - \phi^2 \right) \,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (6 punti)
Si sviluppi in serie di Laurent intorno a $z = i$ e nella regione $0 < |z - i| < 1$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} \,.$$

. . . .

Soluzione
Possiamo procedere in due modi. Il metodo diretto consiste nel calcolare i coefficienti di Laurent a partire dalla definizione

$$C_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-i)^{k+1}} = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{dz}{(z+i)^3(z-i)^{k+4}} = \begin{cases} 0 & k \leq -4 \\ \dfrac{1}{(k+3)!}\dfrac{d^{k+3}}{dz^{k+3}}\dfrac{1}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} & k \geq -3 \end{cases},$$

dove il cammino γ è un generico percorso chiuso contenente il solo polo di ordine tre $z = i$. Poiché la derivata n-esima di $1/(z+i)^3$ è

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{2(z+i)^{n+3}}\Big|_{z=i} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{2(2i)^{n+3}},$$

i coefficienti ($k \geq -3$) di Laurent sono

$$C_k = \frac{1}{(k+3)!}\frac{d^{k+3}}{dz^{k+3}}\frac{1}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{1}{(k+2)!}\frac{(-1)^{k+3}(k+5)!}{2(2i)^{k+6}} = \frac{(k+5)(k+4)}{128(-2i)^k},$$

e lo sviluppo in serie è

$$f(z) = \sum_{k=-3}^{\infty}\frac{(k+5)(k+4)}{128(-2i)^k}(z-i)^k\,.$$

Il secondo metodo consiste nell'utilizzo della serie geometrica con ragione $w = (i-z)/2i$, avendo $|w| < 1$, ovvero:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z-i+2i)^3} = \frac{1}{(2i)^3(z-i)^3\left(1-\frac{i-z}{2i}\right)^3} \\
&= \frac{1}{(2i)^3(z-i)^3}\,\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dw^2}\frac{1}{1-w}\Big|_{w=(i-z)/2i} = \frac{1}{(2i)^3(z-i)^3}\,\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dw^2}\sum_{k=0}^{\infty}w^k\Big|_{w=(i-z)/2i} \\
&= \frac{1}{(2i)^3(z-i)^3}\,\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{z-i}{-2i}\right)^{k-2} = \frac{1}{(2i)^3}\,\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{(z-i)^{k-5}}{(-2i)^{k-2}} \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\,\frac{1}{2}\sum_{k=-3}^{\infty}(k+5)(k+4)\frac{(z-i)^k}{(-2i)^{k+3}} = \sum_{k=-3}^{\infty}\frac{(k+5)(k+4)}{128(-2i)^k}(z-i)^k\,.
\end{aligned}$$

....

Esercizio 4 (6 punti)
Sia M una matrice non singolare complessa $n \times n$, si dimostri che:

- la matrice $MM^\dagger$ è hermitiana;
- gli autovalori, m_k^2, corrispondenti all'insieme $\{|u_k\rangle\}$, $k = 1, \ldots, n$, ortonormale e completo di autostati di $MM^\dagger$, sono positivi;

- la matrice V, che verifica la relazione: $M = UmV^\dagger$, dove U è la matrice unitaria che diagonalizza $MM^\dagger$ e m la matrice diagonale di elementi $m_{kl} = \delta_{kl}\sqrt{m_k^2}$, è unitaria.

. . . .

Soluzione

- La dimostrazione dell'hermitianità consiste nel calcolo della matrice coniugata hermitiana di $MM^\dagger$:

$$(MM^\dagger)^\dagger = (M^\dagger)^\dagger M^\dagger = MM^\dagger \,.$$

- Per verificare che gli autovalori sono positivi, partiamo dall'equazione agli autovalori per un generico k, lo isoliamo moltiplicando a destra per $\langle u_k|$ e inseriamo la relazione di completezza;

$$\begin{aligned} MM^\dagger|u_k\rangle &= m_k^2|u_k\rangle \\ m_k^2 &= \langle u_k|MM^\dagger|u_k\rangle \\ m_k^2 &= \langle u_k|M\left(\sum_l |u_l\rangle\langle u_l\right)|M^\dagger|u_k\rangle \\ m_k^2 &= \sum_l |\langle u_k|M|u_l\rangle|^2 > 0\,, \end{aligned}$$

  si ha la disuguaglianza stretta perché la matrice M, essendo non singolare, non ammette l'autovalore nullo.

- Ricaviamo la matrice V dalla definizione $M = UmV^\dagger$

$$M = UmV^\dagger \;\;\rightarrow\;\; U^\dagger M = mV^\dagger \;\;\rightarrow$$
$$V^\dagger = m^{-1}U^\dagger M \;\;\rightarrow\;\; V = M^\dagger U(m^{-1})^\dagger \;\;\rightarrow\;\; V = M^\dagger U m^{-1}\,,$$

  a questo punto verifichiamo le condizioni di unitarietà $V^\dagger V = VV^\dagger = I$:

$$\begin{aligned} V^\dagger V = m^{-1}U^\dagger MM^\dagger Um^{-1} = m^{-1}m^2m^{-1} = I \\ VV^\dagger = M^\dagger Um^{-1}m^{-1}U^\dagger M = M^\dagger U(m^2)^{-1}U^\dagger M\,, \end{aligned}$$

  poiché: $m^2 = U^\dagger MM^\dagger U \rightarrow Um^2U^\dagger = MM^\dagger \rightarrow (MM^\dagger)^{-1} = U(m^2)^{-1}U^\dagger$ si ha

$$VV^\dagger = M^\dagger U(m^2)^{-1}U^\dagger M = M^\dagger(MM^\dagger)^{-1}M = M^\dagger(M^\dagger)^{-1}M^{-1}M = I\,.$$

. . . .

Esercizio 5 (5 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & |x| \le \pi \\ \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}\,.$$

Soluzione
Calcoliamo direttamente l'integrale

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}(1-\cos 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik\pi}-e^{ik\pi}}{-ik} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-2i\sin(k\pi)}{-ik} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-ix(k-2)} + e^{-ix(k+2)}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin(k\pi)}{k} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2\sin[(k-2)\pi]}{k-2} + \frac{2\sin[(k+2)\pi]}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin[(k-2)\pi]}{k-2} - \frac{\sin[(k+2)\pi]}{k+2}\right] \\
&= \frac{\sin(k\pi)}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{k} - \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2}\right] = \frac{\sin(k\pi)}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-8}{k(k^2-4)} \\
&= \frac{-4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k\pi)}{k(k^2-4)}\,.
\end{aligned}
$$

Nei limiti $k \to 0, \pm 2$ (singolarità eliminabili) si hanno:

$$
\tilde{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad\qquad \tilde{f}(\pm 2) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.
$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Si consideri l'equazione

$$
\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}\,.
$$

- Si verifichi che la funzione $\tilde{\phi}(k,t) = \delta(k)$ è soluzione dell'equazione trasformata (di Fourier) e si determini la corrispondente soluzione in x.
- Posto $\phi(x,0) = e^{-x^2/4t_0}$, con $t_0 > 0$, si risolva l'equazione trasformata, con la condizione al contorno data da $\tilde{\phi}(k,0)$ e con $t \geq 0$.

. . . .

Soluzione

- L'equazione trasformata è

  $$
  \frac{\partial \tilde{\phi}(k,t)}{\partial t} = -k^2 \tilde{\phi}(k,t)\,,
  $$

  poiché la delta di Dirac non dipende dal tempo ma solo da k, sostituendo si ottiene:

  $$
  0 = -k^2 \delta(k)\,.
  $$

  Questa identità è sempre vera, infatti per $k \neq 0$ la delta è nulla, mentre in $k = 0$ è il fattore k^2 che determina l'annullamento del membro di destra.

- La trasformata di Fourier della $\phi(x,0) = e^{-x^2/4t_0}$ è

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}(k,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2/4t_0 + ikx\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 t_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2/4t_0 + ikx - k^2 t_0\right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 t_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x/2\sqrt{t_0} + ik\sqrt{t_0}\right)^2} dx = \sqrt{2\,t_0}\, e^{-k^2 t_0} \,.
\end{aligned}
$$

L'equazione trasformata può essere risolta in t, usando la condizione al contorno per $\tilde{\phi}(k,0) = \sqrt{2\,t_0}\, e^{-k^2(t+t_0)}$, si ha infatti

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\phi}(k,t)}{\partial t} &= -k^2 \tilde{\phi}(k,t) \\
\frac{d\tilde{\phi}(k,t)}{\tilde{\phi}(k,t)} &= -k^2 dt \\
\tilde{\phi}(k,t) &= \tilde{\phi}(k,0) e^{-k^2 t} \\
\tilde{\phi}(k,t) &= \sqrt{2\,t_0}\, e^{-k^2(t+t_0)} \,,
\end{aligned}
$$

da cui, facendo l'antitrasformata:

$$
\phi(x,t) = \frac{\sqrt{2\,t_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k^2(t+t_0) - ikx\right)} dk = \frac{e^{-x^2/4(t+t_0)}}{\sqrt{1 + t/t_0}} \,.
$$