Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 17 dicembre 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

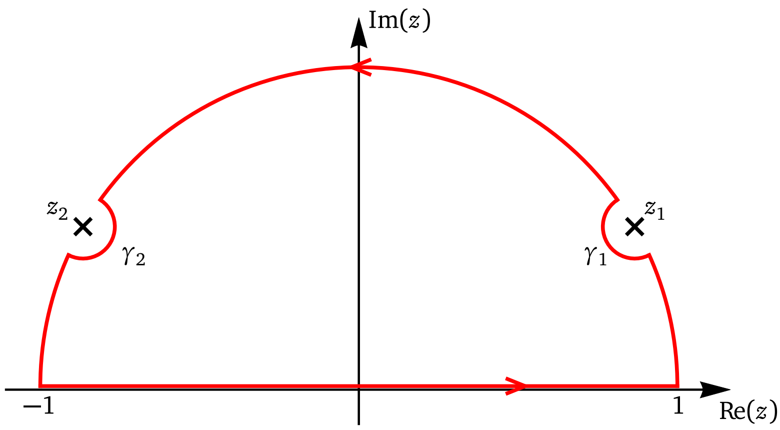
$$O = \mathrm{Pr}\int_0^\pi \frac{d\omega}{2\,\mathrm{sen}(\omega)-1}\,.$$

Soluzione del primo problema

Facendo la sostituzione $z = e^{i\omega}$, ovvero $\omega = -i\ln(z)$, si ha

$$O = -i\,\mathrm{Pr}\int_\Gamma \frac{dz/z}{(z-z^{-1})/i-1} = \mathrm{Pr}\int_\Gamma \frac{dz}{z^2-iz-1}\,,$$

dove il percorso $\Gamma = \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}$ è la semicirconferenza unitaria immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive.



Le uniche singolarità della funzione integranda sono i due poli semplici $z_1 = \left(\sqrt{3}+i\right)/2 = e^{i\pi/6}$ e $z_2 = \left(-\sqrt{3}+i\right)/2 = e^{5i\pi/6}$, che appartengono al percorso Γ ed è rispetto ad essi che va considerato il valore principale. A tal fine, definiamo il percorso Γ_ϵ staccando dalla semicirconferenza Γ due tratti infinitesimi con $\epsilon \to 0^+$, in corrispondenza delle singolarità z_1 e z_2 e sostituendoli con gli archi γ_1 e γ_2, che aggirano le stesse singolarità come mostrato in figura. L'integrale cercato si ottiene come limite per $\epsilon \to 0^+$ dell'opposto dell'integrale su Γ_ϵ cui vanno sottratti i contributi dovuti agli archi γ_1 e γ_2, ovvero

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{dz}{z^2-iz-1}=O-\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\gamma_1}\frac{dz}{z^2-iz-1}+\int_{-\gamma_2}\frac{dz}{z^2-iz-1}\right)$$
$$=O+\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2-iz-1}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2-iz-1}\right),$$

l'ultima identità è stata ottenuta cambiando i segni degli integrali e il verso di percorrenza degli archi. Poiché la superficie di piano complesso delimitata dalla curva Γ_ϵ e dal segmento reale $[-1,1]$, ovvero l'insieme aperto G, che ha frontiera $\partial G=\Gamma_\epsilon\cup[-1,0]$, non contiene singolarità della funzione integranda, il percorso d'integrazione dentato Γ_ϵ può essere deformato con continuità fino a coincidere con il tratto rettilineo $[-1,1]$, percorso da -1 ad 1, senza alterare il valore dell'integrale, si ha cioè

$$\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{dx}{x^2-ix-1}=\int_1^{-1}\frac{dx}{x^2-ix-1}=-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-ix-1}.$$

Usando questo risultato e il lemma per l'integrazione sugli archi, dalla relazione precedente otteniamo l'integrale cercato come

$$O=-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-ix-1}-\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z^2-iz-1}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z^2-iz-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-z_1}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-z_2}\right)-i\pi\left(\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^2-iz-1}+\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^2-iz-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{z_1-z_2}\ln\left(\frac{1-z_1}{1-z_2}\frac{1+z_2}{1+z_1}\right)-i\pi\left(\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2-z_1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}-i}\frac{2-\sqrt{3}+i}{2+\sqrt{3}+i}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right),$$

infine, razionalizzando l'argomento del logaritmo,

$$O=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$J=\int_0^\infty\left(x^{3/2}+x^{2/3}\right)e^{-\alpha x}dx,$$

con $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

Soluzione del secondo problema

Definiamo gli integrali

$$J_{3/2}=\int_0^\infty x^{3/2}e^{-\alpha x}dx,\qquad J_{2/3}=\int_0^\infty x^{2/3}e^{-\alpha x}dx,$$

cosicché si abbia

$$J=J_{3/2}+J_{2/3}.$$

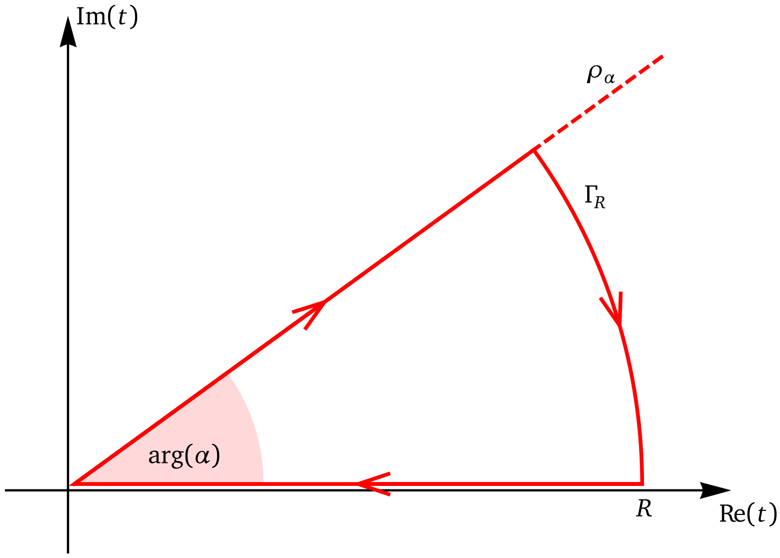
Facciamo la sostituzione $t=\alpha x$, quindi $x=t/\alpha$, in entrambi gli integrali, cosicché il percorso di integrazione diventa

$$\rho_\alpha=\left\{t:t=|\alpha|xe^{i\arg(\alpha)},\forall\,x\in[0,\infty)\right\},$$

è la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo $\arg(\alpha)$ con il semiasse reale positivo, rappresentata in figura dalla linea tratteggiata. Inoltre, poiché $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, si ha $\arg(\alpha) \in (-\pi/2, \pi/2)$, ovvero la semiretta ρ_α appartiene al semipiano delle parti reali positive.
Consideriamo il percorso chiuso mostrato in figura, con $\arg(\alpha) > 0$ (la condizione $\arg(\alpha) < 0$ si deduce banalmente),

$$\Gamma_R = \left\{t : t = |\alpha| x e^{i\arg(\alpha)}\,, \forall\, x \in [0, R)\right\} \cup \left(-\left\{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \arg(\alpha)]\right\}\right) \cup (-[0, R])\,,$$

dove i segni negativi indicano che il verso di percorrenza è opposto a quello dato dalla definizione.



Il percorso chiuso Γ_R, $\forall\, R \in (0, \infty)$, non avvolge alcuna singolarità delle funzioni integrande di entrambi gli integrali, quindi, per il teorema di Cauchy, avremo

$$\lim_{R\to\infty} \alpha^{-5/2} \oint_{\Gamma_R} e^{-t} t^{3/2} dt = \lim_{R\to\infty} \alpha^{-5/3} \oint_{\Gamma_R} e^{-t} t^{2/3} dt = 0\,.$$

Considerando i contributi dei tratti rettilinei e dell'arco si hanno

$$\alpha^{-5/2}\left(\int_{\rho_\alpha} e^{-t} t^{3/2} dt - \int_0^\infty e^{-t} t^{3/2} dt - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-t} t^{3/2} dt\right) = 0\,,$$
$$\alpha^{-5/3}\left(\int_{\rho_\alpha} e^{-t} t^{2/3} dt - \int_0^\infty e^{-t} t^{2/3} dt - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-t} t^{2/3} dt\right) = 0\,.$$

Dimostriamo che i limiti sono nulli, poniamo $t = Re^{i\theta}$, con $\theta \in [0, \arg(\alpha)] \subset (-\pi/2, \pi/2)$ e usiamo la disuguaglianza di Darboux

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{-t} t^\beta dt\right| \le \int_{\gamma_R} \left|e^{-t} t^{3/2} dt\right| = \int_0^{\arg(\alpha)} e^{-R\cos(\theta)} R^{\beta+1} d\theta \le R^{\beta+1} \int_0^{\arg(\alpha)} e^{-R(1-2\theta/\pi)} d\theta = R^{\beta+1} e^{-R} \frac{e^{2R\arg(\alpha)/\pi} - 1}{2R/\pi}$$
$$\le \pi R^\beta \frac{e^{2R(\arg(\alpha)-\pi/2)/\pi} - e^{-R}}{2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,, \qquad \beta = 3/2, 2/3\,,$$

dove l'annullamento del primo esponenziale nel limite $R \to \infty$ è conseguenza della condizione $\arg(\alpha) \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Le due identità dell'equazione precedente danno

$$J_\beta = \alpha^{-\beta-1} \int_{\rho_\alpha} e^{-t} t^\beta dt = \alpha^{-\beta-1} \int_0^\infty e^{-t} t^\beta dt\,, \qquad \beta = 3/2, 2/3\,.$$

Entrambi gli integrali possono essere ricondotti alla forma di un integrale di Eulero del secondo tipo, che dà una rappresentazione della funzione gamma, ovvero

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,,$$

convergente $\forall z \in \mathbb{C}$, tale che: $\mathrm{Re}(z) > 0$, infatti

$$J_\beta = \alpha^{-\beta-1} \int_0^\infty e^{-t} t^\beta dt = \alpha^{-\beta-1} \Gamma(\beta+1) = \alpha^{-\beta-1} \beta \Gamma(\beta), \qquad \beta = 3/2, 2/3,$$

con la condizione di convergenza: $\mathrm{Re}(\beta) + 1 > 0$, cioè $\mathrm{Re}(\beta) > -1$, che è verificata nei due casi in esame: $\mathrm{Re}(3/2) > -1$ e $\mathrm{Re}(2/3) > -1$. In definitiva si ha

$$J = J_{3/2} + J_{2/3} = \alpha^{-5/2} \frac{3}{2} \Gamma(3/2) + \alpha^{-5/3} \frac{2}{3} \Gamma(2/3) = \alpha^{-5/2} \frac{3}{4} \Gamma(1/2) + \alpha^{-5/3} \frac{2}{3} \Gamma(2/3).$$

Usando il valore numerico noto $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, si ottiene

$$J = \alpha^{-5/2} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} + \alpha^{-5/3} \frac{2}{3} \Gamma(2/3).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$T = \int_{|z|=1} \frac{\cosh^2(z) - \mathrm{sen}^3(z)}{z^8} dz.$$

Suggerimento. Potrebbe essere di aiuto considerare sviluppi in serie di potenze positive.

Soluzione del terzo problema

Considerando, come suggerito, le serie di Taylor delle funzioni a numeratore della funzione integranda centrate nell'origine si ha

$$\begin{aligned} T &= \int_{|z|=1} \frac{\cosh^2(z) - \mathrm{sen}^3(z)}{z^8} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{z^8} \left[\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)^2 - \left(\sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)^3 \right] dz \\ &= \int_{|z|=1} \left[\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{2k-4}}{(2k)!} \right)^2 - \frac{1}{z^8} \left(\sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)^3 \right] dz \\ &= T_1 - T_2, \end{aligned}$$

con

$$T_1 = \int_{|z|=1} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{z^{2k-4}}{(2k)!} \right)^2 dz, \qquad T_2 = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^8} \left(\sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)^3 dz.$$

Le uniche singolarità delle funzioni integrande sono: un polo nell'origine di ordine 8 per T_1, di ordine 5 per T_2. Daranno contributo non nullo solo gli integrali le cui integrande siano proporzionali alla potenza z^{-1}. L'integrale T_1 è nullo poiché la sua funzione integranda ha solo potenze pari sia negative che positive.
Il valore dell'integrale T_2 è pari a $2i\pi$-volte il coefficiente della potenza z^7 del cubo della serie. Avremo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)^3 &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}\left(z^7\right) \right)^3 = \cdots + z^7 \left(\underbrace{3 \frac{1}{5!}}_{3z \cdot z \cdot z^5/(5!)} + \underbrace{3 \frac{1}{(3!)^2}}_{3z \cdot z^3/(3!) \cdot z^3/(3!)} \right) + \cdots \\ &= \cdots + z^7 \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{12} \right) + \cdots = \cdots + z^7 \frac{13}{120} + \cdots. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$T_2 = 2i\pi \frac{13}{120} = \frac{13 i\pi}{60},$$

quindi, avendo $T_1 = 0$, il valore dell'integrale cercato è

$$T = T_1 - T_2 = -\frac{13i\pi}{60}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{\Sigma}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni G_3, è rappresentato dalla matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & i & -2i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

dopo aver dimostrato che l'operatore è diagonalizzabile e averne determinato lo spettro discreto, si ottengano le rappresentazioni rispetto alla stessa base canonica degli autovettori e dell'operatore

$$\hat{\Omega} = \widehat{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{\Sigma}\pi}{2}\right)}.$$

N.B. L'operatore $\hat{\Sigma}$ non è normale.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'equazione secolare nella variabile σ è

$$\begin{aligned} \det(\Sigma - I\sigma) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1-\sigma & i & -2i \\ 0 & 3-\sigma & 0 \\ 0 & 2 & -1-\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\ -(1-\sigma^2)(3-\sigma) &= 0, \end{aligned}$$

le soluzioni e quindi gli autovalori, ovvero gli elementi dello spettro discreto, sono

$$\sigma_1 = -1, \qquad \sigma_2 = 1, \qquad \sigma_3 = 3.$$

Otteniamo le rappresentazioni rispetto alla base canonica degli autovettori, che hanno componenti x_k, y_k e z_k, con $k = 1, 2, 3$, risolvendo i tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\sigma_k & i & -2i \\ 0 & 3-\sigma_k & 0 \\ 0 & 2 & -1-\sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Per il primo autovettore, relativo all'autovalore $\sigma_1 = -1$, si ha $(k = 1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & i & -2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui $y_1 0$ e $x_1 = i y_1$, quindi

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Le componenti del secondo autovettore si ottengono risolvendo il sistema $(k = 2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui $y_2 = z_2 = 0$, quindi

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, per il terzo autovettore ($k = 3$) si ha

$$\begin{pmatrix} -2 & i & -2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi: $x_3 = 0$ e $y_3 = 2z_3$, ne consegue che

$$v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché i tre autovettori sono linearmente indipendenti, l'operatore $\hat{\Sigma}$ è diagonalizzabile e si ha la rappresentazione diagonale

$$\Omega_d = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\pi\sigma_1/2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(\sigma_2\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}(\sigma_3\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza si può applicare il teorema spettrale, da cui si evince che l'operatore $\hat{\Omega}$ ha gli stessi autovettori di $\hat{\Sigma}$, mentre gli autovalori sono

$$\eta_1 = \mathrm{sen}\left(\sigma_1 \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,, \qquad \eta_2 = \mathrm{sen}\left(\sigma_2 \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,, \qquad \eta_3 = \mathrm{sen}\left(\sigma_3 \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1\,.$$

Dalle tre equazioni agli autovalori si ottiene la matrice Ω. Infatti si hanno

$$\Omega v_k = \eta_k v_k\,, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \Omega^1_1 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ \Omega^2_1 & \Omega^2_2 & \Omega^2_3 \\ \Omega^3_1 & \Omega^3_2 & \Omega^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Omega^1_1 - i\Omega^1_3 = -1 \\ \Omega^2_1 - i\Omega^2_3 = 0 \\ \Omega^3_1 - i\Omega^3_3 = i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega^1_1 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ \Omega^2_1 & \Omega^2_2 & \Omega^2_3 \\ \Omega^3_1 & \Omega^3_2 & \Omega^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Omega^1_1 = 1 \\ \Omega^2_1 = 0 \\ \Omega^3_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega^1_1 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ \Omega^2_1 & \Omega^2_2 & \Omega^2_3 \\ \Omega^3_1 & \Omega^3_2 & \Omega^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2\Omega^1_2 + \Omega^1_3 = 0 \\ 2\Omega^2_2 + \Omega^2_3 = -2 \\ 2\Omega^3_2 + \Omega^3_3 = -1 \end{cases}.$$

Sono tre sistemi lineari di tre equazioni da cui si ottengono i nove elementi della matrice Σ. In particolare:

- dal secondo sistema: $\Omega^1_1 = 1$, $\Omega^2_1 = 0$, $\Omega^3_1 = 0$;
- dal primo sistema: $\Omega^1_3 = -2i$, $\Omega^2_3 = 0$, $\Omega^3_3 = -1$;
- dal terzo sistema: $\Omega^1_2 = i$, $\Omega^2_2 = -1$, $\Omega^3_2 = 0$,

quindi,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & i & -2i \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la funzione $f(x)$ che verifica l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dy f(w)f(y)\delta(x-w-y) = \frac{d}{dx}\left(xe^{-x^2}\right).$$

Soluzione del quinto problema

Integriamo in dw sfruttando la delta di Dirac e scriviamo la funzione a secondo membro come derivata della funzione gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)f(y) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}.$$

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri e risolviamo per ottenere la trasformata di Fourier della funzione incognita che indichiamo con $\tilde{f}(k)$, si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,\tilde{f}^2(k) &= -\frac{1}{2}(ik)^2\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\\
\tilde{f}^2(k) &= -\frac{(ik)^2}{4\sqrt{\pi}}e^{-k^2/4}\\
\tilde{f}(k) &= \pm\frac{k}{2\pi^{1/4}}e^{-k^2/8}.
\end{aligned}$$

Riscriviamo in termini della derivata della funzione gaussiana, cioè

$$\tilde{f}(k) = \mp\frac{2}{\pi^{1/4}}\frac{d}{dk}e^{-k^2/8},$$

l'anti-trasformata di Fourier dà

$$f(x) = \pm\frac{2}{\pi^{1/4}}\,ix\frac{1}{\sqrt{1/4}}e^{-2x^2},$$

il segno cambia perché il fattore ix della derivata ha segno negativo in quanto si tratta di una anti-trasformata di Fourier, in definitiva le due soluzioni sono

$$f(x) = \pm\frac{4i}{\pi^{1/4}}\,xe^{-2x^2}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostrino le seguenti identità

$$(\beta-\alpha)\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta = \hat{A}_\alpha - \hat{A}_\beta, \qquad \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

$$\lambda\hat{A}_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{A}^k, \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{C} \text{ e con: } |\lambda| > \left\|\hat{A}\right\| > 0$$

dove $\hat{A}$ è un operatore limitato e $\hat{A}_\eta$, con $\eta\in\mathbb{C}$, è il suo operatore risolvente.

Soluzione del sesto Problema

L'operatore risolvente è definito come

$$\hat{A}_\eta = \left(\hat{I}\eta - \hat{A}\right)^{-1}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri della prima identità da destra prima per $\left(\hat{I}\beta-\hat{A}\right)=\hat{A}_\beta^{-1}$ poi per $\left(\hat{I}\alpha-\hat{A}\right)=\hat{A}_\alpha^{-1}$ da sinistra, si arriva a ottenere la stessa quantità, infatti

$$\begin{array}{ll} [\text{membro sinistro}]=(\beta-\alpha)\hat{A}_\alpha & [\text{membro destro}]=\hat{A}_\alpha\left(\hat{I}\beta-\hat{A}\right)-\hat{I} \\ [\text{membro sinistro}]=(\beta-\alpha)\hat{I} & [\text{membro destro}]=\hat{I}\beta-\hat{A}-\hat{I}\alpha+\hat{A} \\ [\text{membro sinistro}]=(\beta-\alpha)\hat{I} & [\text{membro destro}]=(\beta-\alpha)\hat{I} \end{array} ,$$

l'identità è dimostrata.
Per la seconda identità, procediamo moltiplichiamo per $\left(\hat{I}\lambda-\hat{A}\right)=\hat{A}_\lambda^{-1}$ il membro destro, si ha

$$[\text{membro destro}]=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k+1}\hat{A}^k-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{A}^{k+1}\,.$$

Sostituiamo l'indice della prima somma con $k'=k-1$, in questo modo le due serie hanno lo stesso termine, ma estremo inferiore diverso, $k'=-1$ per la prima e $k=0$ per la seconda. Ne consegue che nella differenza le code infinite, da $k=k'=1$, si elidono, rimane solo il primo termine, per $k'=-1$, della prima, che verifica l'identità cercata, ovvero

$$[\text{membro destro}]=\sum_{k'=-1}^{\infty}\lambda^{-k'}\hat{A}^{k'+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{A}^{k+1}=\lambda\hat{A}^0+\sum_{k'=0}^{\infty}\lambda^{-k'}\hat{A}^{k'+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{A}^{k+1}=\lambda\hat{I}\,,$$

che coincide con il membro sinistro, ovvero $\lambda\hat{I}$.