

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

APPELLO STRAORDINARIO PRIMAVERILE DEL 17 APRILE 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

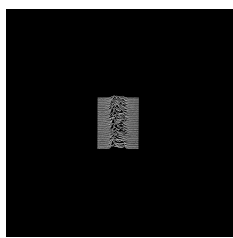
## PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcolino gli integrali

$$I_{m,n} = \oint_{|z|=1} \frac{z^m}{\sinh(z^n)} dz,$$

con  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Curiosità.** Il simbolo usato per l'integrale è la copertina dell'album "Unknown Pleasures", con cui il gruppo *Joy Division* ha esordito nel 1979. Molti concordano nel considerarlo uno degli album musicali più influenti nella storia del rock. Anche la copertina, che mostra una riproduzione tridimensionale delle onde elettromagnetiche prodotte dalla prima pulsar mai scoperta, è considerata una delle più famose. Compare, infatti, al primo posto della classifica: "The 100 Best Album Covers of All Time", pubblicata dalla rivista *Rolling Stone* il 18 luglio 2024. Nella figura sottostante, sono riprodotte le prime dieci copertine di questa classifica, con le didascalie che indicano il gruppo musicale, il titolo dell'album e l'anno di pubblicazione.



Joy Division  
"Unknown Pleasures", 1979



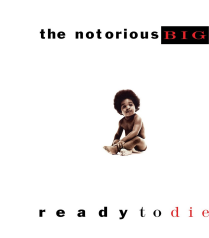
The Beatles  
"Abbey Road", 1969



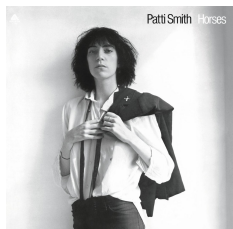
Sly and the Family Stone  
"There's a Riot Goin' On", 1971



Pink Floyd  
"The Dark Side of the Moon", 1973



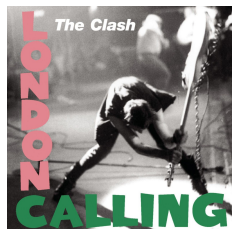
The Notorious B.I.G.  
"Ready to Die", 1994



Patti Smith  
"Horses" 1975



Funkadelic  
"Maggot Brain", 1971



The Clash  
"London Calling" 1979



Cyndi Lauper  
"She's So Unusual", 1983



Nirvana  
"Nevermind", 1991

## SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda può avere un polo nell'origine, lo ha se  $n - m > 0$  ed è proprio di ordine  $n - m$ . Lo si evince considerando la serie di Laurent della funzione integranda, che si ottiene da quella di Taylor della funzione seno

iperbolico e usando la somma della serie geometrica. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{\sinh(z^n)} &= \frac{z^m}{\sum_{j=0}^{\infty} z^{(2j+1)n}/(2j+1)!} = \frac{z^m}{z^n + z^{3n}/3! + \mathcal{O}(z^{5n})} = \frac{z^{m-n}}{1 + z^{2n}/3! + \mathcal{O}(z^{4n})} \\ &= z^{m-n} \left[ 1 - \left( \frac{z^{2n}}{3!} + \frac{z^{4n}}{5!} + \mathcal{O}(z^{6n}) \right) + \left( \frac{z^{2n}}{3!} + \frac{z^{4n}}{5!} + \mathcal{O}(z^{6n}) \right)^2 + \dots \right] \\ &= z^{m-n} - \frac{z^{m+n}}{3!} + \mathcal{O}(z^{m+3n}), \end{aligned}$$

poiché, con  $m, n \in \mathbb{N}$ , le potenze a partire dalla seconda  $m+n$ , sono maggiori o uguali a 2, l'unica possibilità di avere un residuo non nullo, ovvero, un termine della serie con potenza  $-1$  è quella in cui  $m-n = -1$ , cioè:  $n = m+1$ . In questo caso, infatti, la serie diventa

$$\frac{z^m}{\sinh(z^n)} = \frac{z^m}{\sinh(z^{m+1})} = z^{-1} - \frac{z^{2m+1}}{3!} + \mathcal{O}(z^{4m+3}),$$

da cui si evince:

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{z^m}{\sinh(z^{m+1})}, 0 \right] = 1.$$

In ogni altro caso, con  $n \neq m+1$ ,

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{z^m}{\sinh(z^n)}, 0 \right] = 0.$$

Alla luce di questo risultato, si arriva al risultato finale

$$\boxed{\delta}_{m,n} = 2i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{z^m}{\sinh(z^n)}, 0 \right] = \delta_{m+1,n}.$$

## SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Usando la formula di riflessione della funzione gamma di Eulero si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

### SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Usiamo la rappresentazione della funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

con  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Facciamo la sostituzione  $t = u^2$  e si ha

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} t^{2z-1} du,$$

da cui, con  $z = 1/2$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

La formula di riflessione della funzione gamma di Eulero è

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)},$$

che valutata in  $z = 1/2$  dà

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

estraendo la radice quadrata

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

quindi, sfruttando la simmetria della funzione integranda

$$2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Abbiamo dimostrato l'identità richiesta.

### TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)



Dopo aver definito il dominio di convergenza della rappresentazione in serie

$$\text{Abbey Road} (z) = -4\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} k e^{2i\pi k z},$$

si dimostri che la funzione

$$\text{There's a Riot Goin' On} (z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2},$$

ne è la continuazione analitica in tutto il piano complesso, privato di un'infinità di singolarità polari isolate, calcolando esplicitamente l'espressione analitica comune.

**Curiosità.** Le due immagini  e  sono le copertine degli album "Abbey Road" dei i *Beatles* (1969) e "There's a Riot Goin' On" degli *Sly and the Family Stone* (1971).

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La condizione necessaria per la convergenza della serie è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k e^{2i\pi k z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k |e^{2i\pi k z}| = \lim_{k \rightarrow \infty} k e^{-2\pi k \text{Im}(z)} = 0,$$

si se  $\text{Im}(z) > 0$ . In questo caso, si applica l'M-test di Weirstrass, il modulo del termine  $k$ -esimo è limitato da

$$|k e^{2i\pi k z}| \leq k \alpha^k,$$

con  $\alpha = e^{-2\pi \text{Im}(z)} < 1$  e la serie con termine  $k$ -esimo  $k \alpha^k$ , che possiamo scrivere come la derivata di una serie geometrica di ragione  $\alpha$ , come

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \alpha^k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} = \alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k,$$

converge. Quindi, il dominio di convergenza è il semipiano delle parti immaginarie positive,

$$D = \{z : \text{Im}(z) > 0\}.$$

In questo dominio di  $z$  si ha

$$\begin{aligned} \text{Abbey Road} (z) &= -4\pi^2 \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} e^{2i\pi k z} = 2i\pi \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{2i\pi z})^k = 2i\pi \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - e^{2i\pi z}} = 2i\pi \frac{2i\pi e^{2i\pi z}}{(1 - e^{2i\pi z})^2} \\ &= -4\pi^2 \frac{1}{(e^{-i\pi z} - e^{i\pi z})^2} = -4\pi^2 \frac{1}{(-2i \text{sen}(\pi z))^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\text{sen}^2(z) = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)}.$$

Questa è l'espressione analitica della funzione da cui si deduce il dominio di analiticità completo, che è il piano complesso privato dei poli doppi che si hanno in corrispondenza dei numeri relativi, in cui si azzera la funzione seno a denominatore, cioè, la funzione è analitica  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

Calcoliamo la somma della serie  $\text{sen}^2(z)$ , che ha raggio di convergenza infinito, usando il metodo dei residui. Definiamo la funzione di lavoro

$$F(w) = \pi \frac{\cos(\pi w)}{\text{sen}(\pi w)} \frac{1}{(z+w)^2},$$

e, con  $z \notin \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , calcoliamo, con il teorema dei residui, gli integrali

$$J_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} F(w)dw = \sum_{k=-n}^n \text{Res}[F(w), k] + \theta \left( n + \frac{1}{2} - |z| \right) \text{Res}[F(w), z], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

I residui sono

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(w), k] &= \frac{1}{(z+k)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \text{Res}[F(w), z] &= \pi \left. \frac{d}{dw} \frac{\cos(\pi w)}{\text{sen}(\pi w)} \right|_{w=z} = -\frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)}, \end{aligned}$$

Il limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione degli integrali  $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$  è nullo, come si può dimostrare usando la disuguaglianza di Darboux, si ha allora

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}[F(w), k] + \text{Res}[F(w), z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2} - \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)}.$$

La serie è la seconda rappresentazione del problema  $\text{sen}^2(z)$ , quindi si ha

$$\text{sen}^2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2} = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)}.$$

Le due espressioni analitiche di  $\text{sen}^2(z)$  e  $\text{sen}^2(z)$  coincidono,

$$\text{sen}^2(z) = \text{sen}^2(z) = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)},$$

perciò, abbiamo dimostrato che la seconda, avente come dominio di convergenza lo stesso della funzione completa,  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , è il prolungamento analitico della prima.

#### QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)

Facendo uso della serie formale della fasi di Fourier per la distribuzione delta di Dirac, si dimostri l'identità

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw}, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

**Suggerimento.** Ricordo che quello delle fasi è il sistema ortonormale:  $\{e_k(w) = e^{ikw}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ , con  $w \in [-\pi, \pi]$ .

## SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , la distribuzione delta di Dirac può essere rappresentata come

$$\delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d^k e_k(x),$$

dove i coefficienti sono

$$d^k = (e_k, \delta) = \int_{-\pi}^{\pi} e_k^*(x) \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ne consegue

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Sfruttando la periodicità delle fasi, cioè  $e_k(x) = e_k(x - 2n\pi)$ ,  $\forall k, n \in \mathbb{Z}$ .

Quindi, con  $x - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$ , si ha

$$\delta(x - 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(x-2n\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}.$$

Inoltre, avendo:  $\delta(x\alpha) = \delta(x)/|\alpha|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\delta(x - 2n\pi) = \delta\left[2\pi\left(\frac{x}{2\pi} - n\right)\right] = \frac{1}{2\pi} \delta\left(\frac{x}{2\pi} - n\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx},$$

da cui, ponendo  $w = x/(2\pi)$

$$\delta(w - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw},$$

valida per  $w \in [n - 1/2, n + 1/2]$ , infatti

$$-\pi \leq x - 2n\pi \leq \pi \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2\pi} - n \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n - \frac{1}{2} \leq w \leq n + \frac{1}{2},$$

cioè per valori di  $w$  appartenenti all'intervallo  $n$ -esimo  $[n - 1/2, n + 1/2]$ , chiuso, di ampiezza unitaria e centrato in  $n$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , punto in cui annulla l'argomento della delta di Dirac. Possiamo estendere l'intervallo di validità della rappresentazione a tutto l'asse reale, usando




$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [n - 1/2, n + 1/2],$$

che equivale a sommare le distribuzioni delta Dirac, 'attive' e non nulle solo nell' $n$ -esimo intervallo, che, come già specificato, contiene lo zero del loro argomento, cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw},$$



valida, in questa forma nel senso delle distribuzioni,  $\forall w \in \mathbb{R}$ .

## QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Lo spettro discreto dell'operatore hermitiano , definito nello spazio di Hilbert tridimensionale  $G_3$ , contiene i due autovalori:  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Il primo è non degenere, il secondo è degenere e ha molteplicità geometrica e algebrica pari a due. L'operatore  commuta con l'operatore , anch'esso hermitiano, avente, rispetto alla base ortonormale  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset G_3$ , rappresentazione matriciale

$$\widehat{A} \leftrightarrow \widehat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice  che rappresenta l'operatore  rispetto alla stessa base ortonormale  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset G_3$ .

**Curiosità.** Le due immagini  e  sono le copertine degli album "Nevermind" dei Nirvana (1991) e "The Dark Side of the Moon" di Pink Floyd (1973).

### SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

I due operatori hanno gli stessi autovettori, quindi sono diagonalizzati dalla stessa matrice unitaria. C'è un'ambiguità nella scelta dell'assegnazione degli autovalori agli autovettori che va discussa.

Gli autovalori dell'operatore  si ottengono come soluzione dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(\widehat{A} - I\eta) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\eta & 1 & -1 \\ 1 & 1-\eta & 1 \\ -1 & 1 & -1-\eta \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\eta)(\eta^2-4) &= 0, \end{aligned}$$

si hanno:  $\eta_1 = -2$ ,  $\eta_2 = 1$ ,  $\eta_3 = 2$ . Le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\eta_j & 1 & -1 \\ 1 & 1-\eta_j & 1 \\ -1 & 1 & -1-\eta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j^1 \\ e_j^2 \\ e_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

dove  $e_j^k$  è la  $k$ -esima componente contro-variante dello  $j$ -esimo autovettore.

Per il primo autovettore, con  $\eta_1 = -2$ , posto  $e_1^1 = e$ , si ha

$$\begin{cases} e_1^2 - e_1^3 = -3e \\ 3e_1^2 + e_1^3 = -e \end{cases}, \quad e_1^2 = \frac{\det \begin{pmatrix} -3e & -1 \\ -e & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = -e, \quad e_1^3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -3e \\ 3 & -e \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = 2e, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dove si è normalizzato con  $e = 1/\sqrt{6}$ .

Per il secondo autovettore, con  $\eta_2 = 1$ , posto  $e_2^1 = e$ , si ha

$$\begin{cases} e_2^2 - e_2^3 = 0 \\ e_2^2 = -e \\ e_2^3 = -e \end{cases}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dove si è normalizzato con  $e = 1/\sqrt{3}$ .


Infine, il terzo autovettore, con  $\eta_3 = 2$ , posto  $e_3^1 = e$ , si ha

$$\begin{cases} e_3^2 - e_3^3 = e \\ e_3^2 - 3e_3^3 = e \end{cases}, \quad e_3^2 = \frac{\det \begin{pmatrix} e & -1 \\ e & -3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} = e, \quad e_3^3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & e \\ 1 & e \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} = 0, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove si è normalizzato con  $e = 1/\sqrt{2}$ .

Definiamo la matrice unitaria diagonalizzante come

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Scegliamo di assegnare gli autovettori agli autovalori dell'operatore , allineandoli in ordine crescente, cioè, la rappresentazione diagonale è

$$\mathbf{A}_d = \text{diag}(-2, -2, 1),$$

e quella cercata è

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= U \mathbf{A}_d U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$


## SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Usando l'identità del quarto problema

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw},$$

e le proprietà delle trasformate di Fourier, si calcoli la somma della serie numerica

$$\mathbf{A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(10n)}{n}.$$

**Curiosità.** L'immagine  è la copertina dell'album "She's So Unusual" che *Cindy Looper* ha pubblicato nel 1983.

## SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Moltiplichiamo ambo i membri per una funzione  $f(w)$  e integriamo in  $dw$  su  $\mathbb{R}$ , assumendo che la funzione verifichi le condizioni di convergenza,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w-n) f(w) dw &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw} f(w) dw \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w-n) f(w) dw &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw} f(w) dw \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-2\pi k) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi k), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la distribuzione delta di Dirac a primo membro, ponendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(w-n)f(w)dw = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

la trasformata di Fourier a secondo membro, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kw} f(w)dw = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(-2\pi k),$$

dove si è anche usata la simmetria dell'intervallo di somma.

Usiamo la funzione

$$f(w) = \frac{\text{sen}(10w)}{w},$$

cosicché la serie in  $n$  coincide con quella richiesta. La trasformata di Fourier è

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(10w)}{w} e^{-i w u} dw = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(10-u)} - e^{iw(-10-u)}}{w} dw.$$

Deformiamo il percorso d'integrazione, aggirando l'origine con una semicirconfenza nel semipiano delle parti immaginarie positive, ovvero

$$\mathbb{R} \rightarrow \Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup (-\{w : w = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}) \cup [\epsilon, \infty).$$

I due integrali si calcolano con il teorema dei residui e valgono

$$\int_{\Gamma} \frac{w^{iw(10-u)}}{w} dw = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ -2i\pi & u > 10 \end{cases} = -2i\pi\theta(u-10),$$

$$\int_{\Gamma} \frac{w^{iw(-10-u)}}{w} dw = \begin{cases} 0 & u < -10 \\ -2i\pi & u > -10 \end{cases} = -2i\pi\theta(u+10),$$

da cui

$$\tilde{f}(u) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\theta(u-10) - \theta(u+10)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1 & |u| < 10 \\ 0 & |u| > 10 \end{cases}.$$

Dell'identità data segue

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(10n)}{n} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1 & |2\pi k| < 10 \\ 0 & |2\pi k| > 10 \end{cases} = \pi \left( \underbrace{1}_{k=-1} + \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{1}_{k=1} \right),$$

infatti, i contributi con indici  $k \leq -2$  e  $k \geq 2$  sono nulli poiché:  $|2\pi k| \geq 4\pi > 4 \cdot 3,14 = 12,56 > 10$ . Quindi il risultato finale è

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(10n)}{n} = 3\pi.$$