Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 17 aprile 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$R=\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{x^3+1}dx\,.$$

Soluzione del primo problema

Sono di seguito descritti due possibili metodi risolutivi.

Prima procedura risolutiva del primo problema

Il metodo più veloce consiste nell'usare la formula nota

$$\int_0^\infty R(x)\ln(x)dx=-\frac{1}{2}\sum_{\text{tot}}\text{Res}\left[R(z)\left(\ln(z)-i\pi\right)^2\right],$$

dove $R(x)$ è una funzione raziona che non ha poli in $(0,\infty)$ e ha opportuni comportamenti nell'origine e all'infinito. In questo caso

$$R(x)=\frac{x}{x^3+1}\,,$$

ne consegue che

$$\begin{aligned} R(x) &\underset{x\to 0^+}{\sim} x\,, && l=1\,,\\ R(x) &\underset{x\to\infty}{\sim} x^{-2}\,, && h=-2\,, \end{aligned}$$

e la condizione richiesta per la convergenza

$$-l-1=-2<0<1=-h-1$$

è verificata. I poli semplici sono nei punti

$$z_k=e^{(2k+1)i\pi/3}\,,\qquad k=0,1,2\,,$$

e i residui corrispondenti sono

$$R_k=\lim_{z\to z_k}\frac{z\left(\ln(z)-i\pi\right)^2}{z^3+1}(z-z_k)=\frac{\left(\ln(z_k)-i\pi\right)^2}{3z_k}\,,\qquad k=0,1,2\,.$$

In particolare si hanno

$$\begin{aligned} R_0&=\frac{\left(\ln(z_0)-i\pi\right)^2}{3z_0}=-\frac{4\pi^2}{27}e^{-i\pi/3}\,,\\ R_1&=\frac{\left(\ln(z_1)-i\pi\right)^2}{3z_1}=0\,,\\ R_2&=\frac{\left(\ln(z_2)-i\pi\right)^2}{3z_0}=-\frac{4\pi^2}{27}e^{-5i\pi/3}\,. \end{aligned}$$

L'integrale cercato vale

$$R = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4\pi^2}{27}\right)\left(e^{-i\pi/3}+e^{-5i\pi/3}\right) = \frac{2\pi^2}{27}e^{-i\pi}\left(e^{2i\pi/3}+e^{-2i\pi/3}\right) = -\frac{4\pi^2}{27}\cos(2\pi/3)\,,$$

da cui

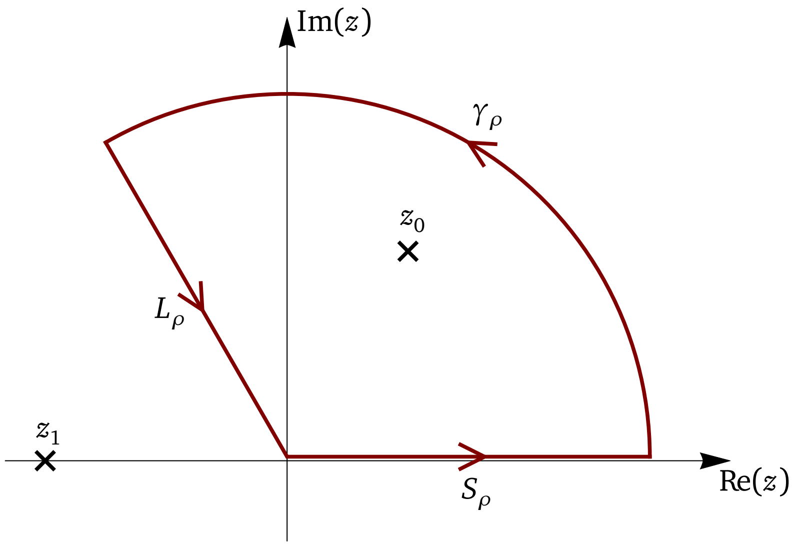
$$R = \frac{2\pi^2}{27}\,.$$

Seconda procedura risolutiva del primo problema

Questo secondo metodo risulta più laborioso ma si basa sulla stessa tecnica utilizzata per ottenere la formula risolutiva del caso precedente.
Definiamo il percorso di integrazione chiuso, mostrato in figura,

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho &= \left\{z : z = re^{2i\pi/3},\ r \in (0,\rho)\right\} \cup [0,\rho] \cup \left\{z : z = re^{i\theta},\ \theta \in (0, 2\pi/3)\right\}\\ &\equiv\ L_\rho \cup S_\rho \cup \gamma_\rho\,,\end{aligned}$$

si tratta della frontiera dello spicchio di disco centrato nell'origine, di raggio ρ e angolo compreso nell'intervallo $[0, 2\pi/3]$. La scelta dei "$2\pi/3$" è dettata dalla presenza della potenza tre della variabile nell'integranda.



L'integrale della stessa funzione integranda su questo percorso chiuso può ottenuto come la somma dei contributi sui tre tratti che lo compongono, due segmenti, L_ρ e S_ρ, e un arco, γ_ρ, si ha

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz = \int_0^\rho \frac{x\ln(x)}{x^3+1}dx + \int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz - e^{4i\pi/3}\int_0^\rho \frac{r\,(\ln(r)+2i\pi/3)}{r^3+1}dr\,.$$

L'ultimo integrale ha il primo termine, a parte il nome della variabile di integrazione, coincide con il primo integrale, per cui

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz = \left(1-e^{4i\pi/3}\right)\int_0^\rho \frac{x\ln(x)}{x^3+1}dx + \int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz - \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\rho \frac{r}{r^3+1}dr\,.$$

Nello spicchio delimitato dal percorso Γ_ρ, per $\rho > 1$ cade uno solo dei tre poli semplici della funzione integranda, ovvero $z_0 = e^{i\pi/3}$, ne consegue che, usando il teorema dei residui si ha anche

$$\oint_{\Gamma_\rho} \frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz = 2i\pi\frac{\ln(z_0)}{3z_0} = -\frac{2\pi^2}{9}e^{-i\pi/3}\,,$$

questo risultato è indipendente da ρ. Nel limite $\rho \to \infty$ si ha

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\pi^2}{9}e^{-i\pi/3} &= \lim_{\rho\to\infty}\left[\left(1-e^{4i\pi/3}\right)\int_0^\rho \frac{x\ln(x)}{x^3+1}dx + \int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz - \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\rho \frac{r}{r^3+1}dr\right] \\
&= \left(1-e^{4i\pi/3}\right)R - \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr \\
&= -2ie^{2i\pi/3}\operatorname{sen}(2\pi/3)R - \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr \\
&= -i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}R - \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr\,,
\end{aligned}
$$

dove si è usato il fatto che

$$
\lim_{\rho\to\infty}\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz\right| = \lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz = 0\,.
$$

Per verificarlo è sufficiente usare la disuguaglianza di Darboux, infatti, con $z=\rho e^{i\theta}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{z\ln(z)}{z^3+1}dz\right| \le \int_0^{2\pi/3}\frac{\rho|\ln(\rho)+i\theta|}{|z^3+1|}d\theta \quad &\le \quad \frac{\rho^2}{\rho^3-1}\int_0^{2\pi/3}(|\ln(\rho)|+\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\rho^2}{\rho^3-1}\frac{2\pi}{3}\left(|\ln(\rho)|+\frac{\pi}{3}\right)\underset{\rho\to\infty}{\sim}\frac{2\pi}{3}\frac{\ln(\rho)}{\rho}\underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo ottenuto l'integrale cercato R come

$$
\frac{2\pi^2}{9}e^{-i\pi/3} = i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}R + \frac{2i\pi e^{4i\pi/3}}{3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr\,,
$$

da cui

$$
R = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{i\pi}{3} - e^{2i\pi/3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr\right).
$$

L'integrale a secondo membro si calcola con lo stesso metodo usato per il precedente, ovvero integrando la stessa funzione sul percorso Γ_ρ, e facendo il limite $\rho \to \infty$ e uguagliando questo risultato con quello ottenuto con il teorema dei residui. Il primo risultato è

$$
\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{z}{z^3+1}dz &= \left(1-e^{4i\pi/3}\right)\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr \\
&= -2ie^{2i\pi/3}\operatorname{sen}(2i\pi/3)\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr \\
&= -i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr\,,
\end{aligned}
$$

mentre con il teorema dei residui si ottiene

$$
\lim_{\rho\to\infty}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{z}{z^3+1}dz = 2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^3+1},z_0\right] = \frac{2i\pi}{3}e^{-i\pi/3}\,,
$$

uguagliando le due espressioni si arriva al valore dell'integrale

$$
\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr = \frac{2i\pi}{3}e^{-i\pi/3}\frac{1}{-i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.
$$

Sostituiamo nell'espressione di R

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{i\pi}{3} - e^{2i\pi/3}\int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}dr\right) \\
&= \frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}}\left(i - \frac{2e^{2i\pi/3}}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2\pi^2}{9\sqrt{3}}\left(i - \frac{2(-1/2+i\sqrt{3}/2)}{\sqrt{3}}\right),
\end{aligned}
$$

l'unità immaginaria nella parentesi tonda si cancella e si ottiene il risultato cercato, cioè

$$
R = \frac{2\pi^2}{27}.
$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$
S = \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+4}d\alpha .
$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è periodica in α per cui possiamo estendere l'intervallo d'integrazione

$$
S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+4}d\alpha .
$$

Con la sostituzione $z = e^{i\alpha}$, da cui $d\alpha = -idz/z$, si ha

$$
S = -\frac{i}{2}\int_{|z|=1} \frac{z+1/z}{z+1/z+8}\frac{dz}{z} = -\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}dz .
$$

La funzione integranda, nella variabile z, ha i tre poli semplici

$$
z_0 = 0 \qquad z_{1,2} = -4 \mp \sqrt{15},
$$

sono interni alla circonferenza unitaria z_0 e $z_2 = -4+\sqrt{15}$. Usando il teorema dei residui

$$
\begin{aligned}
S &= 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[-\frac{i}{2}\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_0\right] + \mathrm{Res}\left[-\frac{i}{2}\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_2\right]\right) \\
&= \pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_2\right]\right).
\end{aligned}
$$

I due residui sono

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_0 = 0\right] &= 1, \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_2 = -4+\sqrt{15}\right] &= \frac{z_2^2+1}{z_2\,(z_1-z_2)},
\end{aligned}
$$

poiché $z_2^2+1 = -8z_2$, si ha

$$
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+1}{z\,(z^2+8z+1)}, z_2 = -4+\sqrt{15}\right] = -\frac{8}{z_1-z_2} = -\frac{4}{\sqrt{15}}.
$$

L'integrale S vale

$$S = \pi\left(1 - \frac{4}{\sqrt{15}}\right).$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ricavino i coefficienti della prima serie di Laurent centrata in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos(z)} - 2\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3},$$

fino all'ordine $O(z^4)$ compreso e se ne determini il dominio di convergenza.

Soluzione del terzo problema

La funzione ha singolarità in $z_k = 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti un cui la funzione coseno vale 1. Quindi la prima serie di Laurent centrata nell'origine converge nella corona circolare

$$C_0 = \{z : 0 < |z| < 2\pi\}\ .$$

Sfruttiamo le serie di Taylor note delle funzione seno e coseno

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-(1-z^2/2+z^4/4!+O(z^6))} - \frac{2}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)\right), \\
&= \frac{2}{z^2}\frac{1}{1-(2z^2/4!-2z^4/6!+2z^6/8!+O(z^8))} - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{3!} - 2\frac{z^2}{5!} + O(z^4) \\
&= \frac{2}{z^2}\left[1 + \left(\frac{2z^2}{4!} - \frac{2z^4}{6!} + \frac{2z^6}{8!} + O(z^8)\right) + \left(\frac{2z^2}{4!} - \frac{2z^4}{6!} + \frac{2z^6}{8!} + O(z^8)\right)^2 + \left(\frac{2z^2}{4!} - \frac{2z^4}{6!} + \frac{2z^6}{8!} + O(z^8)\right)^3 + \cdots\right] \\
&\quad - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{3!} - 2\frac{z^2}{5!} + O(z^4),
\end{aligned}$$

i poli doppi nell'origine delle due funzioni $1/(1-\cos(z))$ e $-2\operatorname{sen}(z)/z^3$ si cancellano, quindi la funzione completa ha una singolarità eliminabile in $z = 0$, possiamo includere questo punto nel dominio che diventa il disco

$$D_0 = \{z : |z| < 2\pi\}\ .$$

Inoltre ci sono solo potenze pari, quindi dovremo calcolare solo tre coefficienti: C_0, C_2 e C_4. Al coefficiente C_0 contribuiscono solo due termini, il primo della prima parentesi tonda e il secondo della seconda linea

$$C_0 = \frac{4}{4!} + \frac{2}{3!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Al coefficiente C_2 contribuiscono il secondo termine della prima parentesi tonda, il quadrato del primo della seconda parentesi tonda e il terzo della seconda linea

$$C_2 = -\frac{4}{6!} + 2\left(\frac{2}{4!}\right)^2 - \frac{2}{5!} = \frac{-4+10-12}{6!} = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}.$$

Al coefficiente C_4 contribuiscono il terzo termine della prima parentesi tonda, il doppio prodotto dei primi due della seconda parentesi tonda, il cubo del primo della terza parentesi tonda e il quarto non indicato della seconda linea

$$C_4 = \frac{4}{8!} - \frac{16}{4!6!} + 2\left(\frac{2}{4!}\right)^3 + 2\frac{1}{7!} = \frac{11}{3\times 7!} = \frac{11}{15120}.$$

In definitiva si ha

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{120} + \frac{11}{15120}z^4 + O(z^6).$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Le tre matrici 2×2 R_j, $j = 1,2,3$, rappresentano tre rotazioni piane della stessa ampiezza $\theta = 2\pi/3$ e di centri c_j, $j = 1,2,3$. Sapendo che questi tre vettori definiscono i vertici di un triangolo equilatero, ovvero che

$$\|c_1 - c_2\| = \|c_1 - c_3\| = \|c_2 - c_3\| \,,$$

si dimostri che

$$R_1 R_2 R_3 = I \,,$$

dove I è la matrice identità.

Soluzione del quarto problema

La rotazione in senso antiorario centrata in c_1 e di angolo θ di un generico vettore v può essere definita come

$$v \to v' = R_3 v = c_3 + R\,(v - c_3) \,,$$

in termini di vettori 2×1 e matrici 2×2 si ha

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3^1 \\ c_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 - c_3^1 \\ v^2 - c_3^2 \end{pmatrix},$$

dove l'indice alto è quello di componente controvariante, quello basso indica il vettore usato di volta in volta come centro. Con la seconda rotazione si ha

$$v'' = R_2 v' = R_2 R_1 v = c_2 + R\left(v' - c_2\right) = c_2 + R\,[c_3 + R\,(v - c_3) - c_2] \,,$$

infine la prima

$$v''' = R_1 v'' = R_1 R_2 v' = R_1 R_2 R_3 v = c_1 + R\left(v'' - c_1\right) = c_1 + R\,\{c_2 + R\,[c_3 + R\,(v - c_3) - c_2] - c_1\} \,.$$

In particolare, volgendo i prodotti

$$R_1 R_2 R_3 v = (I - R) c_1 + R(I - R) c_2 + R^2 (I - R) c_3 + R^3 v = (I - R)\left(c_1 + R c_2 + R^2 c_3\right) + v \,,$$

abbiamo usato: $R^3 = I$, la rotazione è di un terzo di angolo giro quindi tre rotazione successive coincidono con nessuna rotazione ovvero con l'identità, abbiamo anche sfruttato la commutazione di R con se stessa e con l'identità. Supponiamo, senza perdita di generalià, che i vettori c_j, $j = 1,2,3$ puntino i vertici, disposti secondo una rotazione in senso antiorario, di un triangolo equilatero con un vertice nell'origine, c_3, e con il lato $c_3 c_1$, di lunghezza L, orizzontale, si hanno cioè

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = L \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$c_1 + R c_2 + R^2 c_3 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} \cos(\theta)/2 - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)/2 \\ \mathrm{sen}(\theta)/2 + \sqrt{3}\cos(\theta)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $\theta = 2\pi/3$ si hanno: $\cos(\theta) = -1/2$, $\mathrm{sen}(\theta) = \sqrt{3}/2$, quindi

$$c_1 + R c_2 + R^2 c_3 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di $R_1 R_2 R_3 v$, otteniamo

$$R_1 R_2 R_3 v = (I - R) \underbrace{\left(c_1 + R c_2 + R^2 c_3\right)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + v = v \,,$$

che, per l'arbitrarietà di v, implica

$$R_1 R_2 R_3 = I \,,$$

che l'identità che si chiedeva di dimostrare.
È interessante osservare che il risultato ottenuto non è indipendente dall'ordine dei vertici c_1, c_2 e c_3. Infatti, l'ordine usato è quello di una rotazione in senso antiorario così come in senso antiorario. L'annullamento del termine $c_1 + Rc_2 + R^2c_3$ si ha anche per le due altre permutazioni positive

$$c_1 + Rc_2 + R^2c_3 = c_2 + Rc_3 + R^2c_1 = c_3 + Rc_1 + R^2c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

come si evince facilmente moltiplicando per R e R^2 l'espressione iniziale e usando l'identità $R^3 = I$. Con le permutazioni negative si ottiene un vettore non nullo, in particolare

$$c_2 + Rc_1 + R^2c_3 = L\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

In uno spazio di Hilbert E sono definiti i vettori

$$|u_k\rangle = \alpha|e_{2k-1}\rangle + \beta|e_{2k}\rangle, \qquad k \in \mathbb{N},$$

in termini dei vettori dell'insieme ortonormale e completo $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ e degli scalari non nulli α e β, che verificano la condizione

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

- L'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ è ortonormale?
- L'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ è completo?
- L'operatore $\hat{T}$, tale che

  $$\hat{T}|e_k\rangle = |u_k\rangle, \qquad k \in \mathbb{N},$$

  è unitario?
- Conserva il prodotto scalare?

Soluzione del quinto problema

Verifichiamo l'ortonormalità calcolando il prodotto scalare tra i vettori dell'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ sfruttando l'ortonormalità dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, ovvero la condizione $\langle e_k|e_j\rangle = \delta_j^k$, $k, j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle u_k|u_j\rangle &= \left(\alpha^*\langle e_{2k-1}| + \beta^*\langle e_{2k}|\right)\left(\alpha|e_{2j-1}\rangle + \beta|e_{2j}\rangle\right) \\
&= |\alpha|^2\langle e_{2k-1}|e_{2j-1}\rangle|\beta|^2\langle e_{2k}|e_{2j}\rangle + \alpha^*\beta\langle e_{2k-1}|e_{2j}\rangle + \beta^*\alpha\langle e_{2k}|e_{2j-1}\rangle \\
&= |\alpha|^2\delta_{2j-1}^{2k-1} + |\beta|^2\delta_{2j}^{2k} + \alpha^*\beta\delta_{2j}^{2k-1} + \beta^*\alpha\delta_{2j-1}^{2k} \\
&= \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\delta_j^k \\
&= \delta_j^k, \qquad k, j \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

dove sono state usate le ovvie identità

$$\delta_{2j-1}^{2k-1} = \delta_{2j}^{2k} = \delta_j^k, \qquad \delta_{2j}^{2k-1} = \delta_{2j-1}^{2k} = 0, \qquad \forall\, k, j \in \mathbb{N}.$$

Ne consegue che l'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ **è ortonormale**.
Per verificarne la completezza usiamo l'equivalenza di questa condizione con il fatto che l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori dell'insieme sia il vettore nullo. In particolare la confutiamo definendo dei vettori non nulli ortogonali a tutti i vettori dell'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. È infatti sufficiente considerare i vettori, diversi dal vettore nullo,

$$|p_k\rangle = x|e_{2k-1}\rangle + y|e_{2k}\rangle, \qquad k \in \mathbb{N},$$

i cui prodotti scalari con i vettori dell'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ sono

$$\langle p_k|u_j\rangle = \delta_j^k\left(x^*\alpha + y^*\beta\right), \qquad k, j \in \mathbb{N},$$

è quindi sufficiente porre $(x,y) = (\beta^*, -\alpha^*)$ per ottenere un insieme di vettori, $\{|p_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, non nulli, per di più ortonormali, ciascuno dei quali è ortogonale a tutti i vettori di $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, cioè

$$\langle p_k|u_j\rangle = 0\,, \qquad \forall k, j \in \mathbb{N}\,.$$

Ne consegue che l'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ **non è completo**.
L'operatore $\hat{T}$ ha, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, la rappresentazione matriciale

$$T_j^k = \langle e_k|\hat{T}|e_j\rangle = \langle e_k|u_j\rangle = \langle e_k|\alpha e_{2j-1} + \beta e_{2j}\rangle = \alpha\delta_{2j-1}^k + \beta\delta_{2j}^k\,,$$

da cui si evince che il determinante è nullo, infatti

$$\det(T) = \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0\,.$$

Poichè un operatore unitario deve avere determinante uguale ad una fase pura, ovvero ad un numero complesso di modulo unitario, il fatto che $\det(T) = 0$ implica che l'operatore $\hat{T}$ **non è unitario**.
Il fatto che l'operatore $\hat{T}$ conservi il prodotto scalare, che sia cioà isometrico, può essere provato confrontando il prodotto scalare tra due le immagini tramite lo stesso operatore $\hat{T}$ di due generici vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ con $\langle a|b\rangle$. Usiamo le rappresentazioni dei vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$,

$$|a\rangle = a^k|e_k\rangle\,, \qquad |b\rangle = b^k|e_k\rangle\,,$$

e indichiamo con $|a'\rangle$ e $|b'\rangle$ le immagini tramite l'operatore $\hat{T}$, dei vettori $|a'\rangle$ e $|b'\rangle$, cioè

$$|a'\rangle = \hat{T}|a\rangle\,, \qquad |b'\rangle = \hat{T}|b\rangle\,.$$

Il prodotto scalare tra i vettori originali è

$$\langle a|b\rangle = a^{k*}b^j\langle e_k|e_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k*}b^j\delta_j^k = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k*}b^k\,,$$

dove abbiamo usato l'azione nota $\hat{T}|e_k\rangle = u_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e l'ortonormalità dell'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Per il prodotto scalare dei vettori trasformati si ha

$$\langle a'|b'\rangle = \langle a|\hat{T}^\dagger\hat{T}|b\rangle = a^{k*}b^j\langle e_k|\hat{T}^\dagger\hat{T}|e_j\rangle = a^{k*}b^j\langle u_k|u_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k*}b^j\delta_j^k = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k*}b^k = \langle a|b\rangle\,.$$

I prodotti coincidono, l'operatore $\hat{T}$ **conserva il prodotto scalare**.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la norma dell'operatore P, definito in $L^2(\mathbb{R})$ dall'azione

$$Pf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{e^{(x-y)^2}}dy\,, \qquad \forall f(x) \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

Soluzione del sesto Problema

La norma di un operatore Q è definita come segue

$$\|Q\| = \sup_{\|g\|=1}\{\|Qg(x)\|\}\,,$$

ovvero come il limite superiore delle norme delle funzioni $Qg(x)$ ottenute dall'applicazione dell'operatore su generiche funzioni $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ a norma unitaria. D'altro canto il teorema di Plancherel afferma che $\forall\, g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ esiste una trasformata di Fourier (TF) $\tilde{g}(k) \equiv \mathscr{F}_k[g(x)] \in L^2(\mathbb{R})$, definita a meno di una quasi dappertutto nulla,

tale che $\|g\| = \|\tilde{g}\|$.
La norma della funzione data $Pf(x)$ può essere ottenuta dalla norma della TF, che calcoliamo usando il teorema della convoluzione. Infatti l'integrale che descrive l'azione dell'operatore sulla funzione è la convoluzione della funzione stessa con una funzione gaussiana, ne consegue che

$$\mathscr{F}_k[Pf(x)] = \mathscr{F}_k\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{e^{(x-y)^2}} dy\right] = \mathscr{F}_k\left[f(x) * e^{-x^2}\right] = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right].$$

La TF della funzione gaussiana è ancora una funzione gaussiana, in particolare si ha

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,.$$

La norma della funzione $Pf(x)$ vale

$$\|Pf(x)\| = \|\mathscr{F}_k[Pf(x)]\| = \sqrt{2\pi}\left\|\tilde{f}(k)\frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\right\| = \sqrt{\pi}\left\|\tilde{f}(k)e^{-k^2/4}\right\|.$$

Quindi quella dell'operatore vale

$$\|P\| = \sup_{\|f\|=1}\{\|Pf(x)\|\} = \sqrt{\pi}\sup_{\|f\|=1}\left\{\left\|\tilde{f}(k)e^{-k^2/4}\right\|\right\} = \sqrt{\pi}\sup_{\|\tilde{f}\|=1}\left\{\left\|\tilde{f}(k)e^{-k^2/4}\right\|\right\},$$

nell'ultima identità abbiamo usato $\|f\| = \left\|\tilde{f}\right\|$. La disuguaglianza di Schwarz $\|gh\| \le \|g\|\,\|h\|$ valide per una coppia generica di funzione $g(x), h(x) \in L^2(\mathbb{R})$, implica

$$\|P\| = \sqrt{\pi}\sup_{\|\tilde{f}\|=1}\left\{\left\|\tilde{f}(k)e^{-k^2/4}\right\|\right\} \le \sqrt{\pi}\sup_{\|\tilde{f}\|=1}\left\{\left\|\tilde{f}(k)\right\|\left\|e^{-k^2/4}\right\|\right\} = \sqrt{\pi}\left\|e^{-k^2/4}\right\|.$$

Calcoliamo la norma $\left\|e^{-k^2/4}\right\|$, si ha

$$\left\|e^{-k^2/4}\right\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-k^2/4}\right|^2 dk\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/2} dk\right)^{1/2} = \left(\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k/\sqrt{2}\right)^2}\frac{dk}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} = (2\pi)^{1/4}\,.$$

Ne consegue che

$$\|P\| = 2^{1/4}\,\pi^{3/4}\,.$$