Metodi Matematici per la Fisica

Secondo esonero - 16 giugno 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Facendo uso delle proprietà della matrici di Pauli, si calcoli il commutatore

$$C = \left[e^{\sigma_1+\sigma_2}, \operatorname{sen}\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right] .$$

Soluzione del primo problema

Consideriamo le potenze intere della somma di una generica coppia di matrici di Pauli non uguali $(\sigma_m+\sigma_n)$, con $m, n \in \{1,2,3\}$ e $m \neq n$. Poiché le matrici di Pauli anti-commutano, per le potenze pari si ha la legge ricorsiva

$$\begin{aligned}
(\sigma_m+\sigma_n)^2 &= (\sigma_m+\sigma_n)(\sigma_m+\sigma_n) = 2I + \sigma_m\sigma_n + \sigma_n\sigma_m = 2I + \underbrace{\{\sigma_m, \sigma_n\}}_{=0} = 2I \\
(\sigma_m+\sigma_n)^4 &= (\sigma_m+\sigma_n)^2(\sigma_m+\sigma_n)^2 = 2^2 I \\
\vdots &= \vdots \\
(\sigma_m+\sigma_n)^{2k} &= 2^k I\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}$$

dove I è la matrice identità 2×2. Le potenze dispari si ottengono a partire dalla relazione precedente, ovvero

$$(\sigma_m+\sigma_n)^{2k+1} = 2^k(\sigma_m+\sigma_n)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Sfruttando queste relazioni, le espressioni matriciali dell'esponenziale e della funzione seno si possono calcolare attraverso i rispettivi sviluppi in serie. In particolare per l'esponenziale, separando potenze pari e potenze dispari, avremo

$$e^{\sigma_1+\sigma_2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k)!} + (\sigma_1+\sigma_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!}\,,$$

scrivendo in entrambi i termini $2^k = \sqrt{2}^{2k}$, moltiplicando e dividendo per $\sqrt{2}$ il secondo si ha

$$e^{\sigma_1+\sigma_2} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^{2k}}{(2k)!} + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\cosh\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) .$$

Lo sviluppo in serie della funzione seno ha solo potenze dispari, quindi, seguendo quanto fatto per il secondo termine dell'espressione precedente, si ottiene l'espressione matriciale

$$\operatorname{sen}\left(\sigma_2+\sigma_3\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\sigma_2+\sigma_3)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{2}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right) .$$

Ne consegue che il commutatore è

$$\begin{aligned}
C &= \left[I\cosh\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right), \frac{\sigma_2+\sigma_3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)\right] \\
&= \frac{\cosh\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}\left[I, \sigma_2+\sigma_3\right] + \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)}{2}\left[\sigma_1+\sigma_2, \sigma_2+\sigma_3\right] \\
&= \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)}{2}\left[\sigma_1+\sigma_2, \sigma_2+\sigma_3\right] \\
&= \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)}{2}\left(\left[\sigma_1,\sigma_2\right] + \left[\sigma_1,\sigma_3\right] + \left[\sigma_2,\sigma_2\right] + \left[\sigma_2,\sigma_3\right]\right) \\
&= i\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)\left(\sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1\right)\,,
\end{aligned}$$

in forma esplicita

$$C = i \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} .$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

L'operatore normale, non degenere $\hat{X}$, definito nello spazio di Hilbert di dimensione 7, E_7, verifica la relazione

$$\hat{P}_7\left(\hat{X}\right) = \hat{0} ,$$

dove $\hat{0}$ rappresenta l'operatore nullo e $P_7(x)$ è il polinomio di settimo grado

$$P_7(x) = 16 + 20x + 18x^2 + 14x^3 - x^4 - 5x^5 - 3x^6 + x^7 .$$

Si determinino la traccia e il determinante di $\hat{X}$.

Soluzione del secondo problema

L'operatore è diagonalizzabile, ovvero ammette come autovettori un insieme ortonormale di vettori dello spazio vettoriale E_7, $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{7}$, che quindi rappresenta una base dello stesso spazio vettoriale. Le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{X}|e_k\rangle = \lambda_k|e_k\rangle , \qquad k = 1, 2, \ldots, 7 ,$$

λ_k è, ovviamente, il k-esimo autovalore. Poiché non c'è degenerazione si ha che, $\forall\, k, m \in \{1, 2, \ldots, 7\}$,

$$k \neq m \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k \neq \lambda_m .$$

Indichiamo con X la matrice diagonale 7×7 che rappresenta l'operatore rispetto alla base dei suoi autovettori, ovvero

$$X = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7\right) .$$

La relazione operatoriale $\hat{P}_7\left(\hat{X}\right) = \hat{0}$ vale anche per la matrice X, quindi

$$P_7\left(X\right) = \operatorname{diag}\left(P_7(\lambda_1), P_7(\lambda_2), \ldots, P_7(\lambda_7)\right) = \operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0) ,$$

dove con $\operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0)$ si è indicata la matrice nulla 7×7. L'ultima identità implica

$$P_7(\lambda_k) = 0 , \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, 7\} ,$$

ovvero, ciascun autovalore è uno zero del polinomio. Per il teorema fondamentale dell'algebra un polinomio di settimo grado ha 7 zeri, ne consegue che, necessariamente, i 7 autovalori distinti rappresentano tutti gli zeri del polinomio. Possiamo, quindi, riscriverlo come prodotto di monomi, in termini degli zeri, gli autovalori di $\hat{X}$,

$$P_7(x) = \prod_{k=1}^{7} \left(x - \lambda_k\right) .$$

Il determinante e la traccia di $\hat{X}$ sono invarianti e coincidono, rispettivamente, con il prodotto e con la somma degli autovalori, cioè

$$\det\left(\hat{X}\right) = \prod_{k=1}^{7} \lambda_k , \qquad \operatorname{Tr}\left(\hat{X}\right) = \sum_{k=1}^{7} \lambda_k .$$

Possiamo estrarre queste combinazioni degli autovalori dai coefficienti del polinomio $P_7(x)$. Infatti, se sviluppiamo il prodotto dei monomi, calcolando in particolare il coefficiente della potenza x^6 e il termine noto si ha

$$P_7(x) = \prod_{k=1}^{7}(x-\lambda_k) = x^7 + x^6\left(-\sum_{k=1}^{7}\lambda_k\right) + \cdots (-1)^7\prod_{k=1}^{7}\lambda_k = x^7 - \mathrm{Tr}\left(\hat{X}\right)\, x^6 + \cdots - \det\left(\hat{X}\right) .$$

Il coefficiente della sesta potenza e il termine noto rappresentano rispettivamente gli opposti della traccia e del determinate, quindi, usando l'espressione data del polinomio

$$P_7(x) = 16 + 20x + 18x^2 + 14x^3 - x^4 - 5x^5 - 3x^6 + x^7 .$$

si ottengono

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{X}\right) = 3\,, \qquad \det\left(\hat{X}\right) = -16 .$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli il valore di aspettazione $F_v = \langle v|\hat{F}|v\rangle$ dell'operatore $\hat{F}$ rispetto al vettore $|v\rangle$, definiti in uno spazio di Hilbert a dimensione infinita, usando, per il vettore $|v\rangle$, la rappresentazione

$$|v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} v_k|e_k\rangle\,, \qquad v_k = \alpha^k\,,$$

rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, con $|\alpha| < 1$ e sapendo che l'azione di $\hat{F}$ sui vettori della base è descritta dalla relazione

$$\hat{F}|e_k\rangle = k|e_k\rangle + (k-1)|e_{k-1}\rangle\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,,$$

con $|e_0\rangle = |0\rangle$.

Soluzione del terzo problema

Calcoliamo direttamente il valore di aspettazione sfruttando la rappresentazione del vettore in termini dei vettori ortonormali della base

$$\begin{aligned} F_v &= \sum_{k,j=1}^{\infty}\alpha^{*j}\alpha^k\langle e_j|\hat{F}|e_k\rangle = \sum_{k,j=1}^{\infty}\alpha^{*j}\alpha^k\left(k\langle e_j|e_k\rangle + (k-1)\langle e_j|e_{k-1}\rangle\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,\alpha^{*(k-1)}\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,|\alpha|^{2(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} = (1+\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} . \end{aligned}$$

La serie può essere calcolata come derivata di una serie geometrica di ragione $|\alpha|^2 < 1$, ovvero, derivando termine a termine,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha|^{2k} &= |\alpha|^2\sum_{k=1}^{\infty}k\,\left(|\alpha|^2\right)^{k-1} = |\alpha|^2\frac{d}{d|\alpha|^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\alpha|^2\right)^k \\ &= |\alpha|^2\frac{d}{d|\alpha|^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\alpha|^2\right)^k - 1\right) = |\alpha|^2\frac{d}{d|\alpha|^2}\left(\frac{1}{1-|\alpha|^2} - 1\right) = \frac{|\alpha|^2}{\left(1-|\alpha|^2\right)^2} . \end{aligned}$$

In definitiva

$$F_v = \frac{(1+\alpha)}{\left(1-|\alpha|^2\right)^2}|\alpha|^2 .$$

Quarto problema (punteggio 3/30)

Con il metodo della funzione di Green, si risolva l'equazione differenziale

$$u'(x) - u(x) = \theta(x)\,,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino di Heaviside. Una volta ottenuta, si verifichi esplicitamente la soluzione.

Soluzione del quarto problema

L'operatore differenziale è lineare e a coefficienti costanti. La funzione di Green, $G(x)$, si ottiene come soluzione dell'equazione impulsiva, ovvero l'equazione che ha lo stesso operatore differenziale e la delta di Dirac per funzione di ingresso,

$$G'(x) - G(x) = \delta(x)\,.$$

Facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ha

$$(ik-1)\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik-1}\,,$$

dove $\tilde{G}(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione di Green. L'anti-trasformata si calcola integrando nel piano complesso k, sfruttando il lemma di Jordan e il teorema dei residui,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}(ik-1)}dk = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k+i}dk = \begin{cases} 0 & x>0 \\ -e^{x} & x<0 \end{cases}\,.$$

Per valori positivi di x l'integrale è nullo in quanto l'unico polo, $k=-i$, non è contenuto nel percorso di integrazione, che si estende nel semipiano $\mathrm{Im}(k)>0$. Il segno meno nel caso $x<0$ si ottiene poiché il percorso nel semipiano $\mathrm{Im}(k)<0$ è orientato in senso orario e quindi negativo. In definitiva la funzione di Green è

$$G(x) = -\theta(-x)e^{x}\,.$$

La soluzione è data dalla convoluzione della funzione di ingresso e di questa funzione di Green, ovvero

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')\theta(x')dx' = -\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x'-x)\theta(x')e^{x-x'}dx' = -e^{x}\begin{cases} \int_x^{\infty} e^{-x'}dx' = e^{-x} & x>0 \\ \int_0^{\infty} e^{-x'}dx' = 1 & x<0 \end{cases}\,.$$

Riscriviamo la soluzione con le funzioni di Heaviside e si ha

$$u(x) = -e^{x}\theta(-x) - \theta(x)\,.$$

Verifichiamo che sia soluzione dell'equazione. Calcoliamo la derivata prima

$$u'(x) = -e^{x}\theta(-x) + e^{x}\delta(x) - \delta(x) = -e^{x}\theta(-x) + (e^{x}-1)\delta(x) = -e^{x}\theta(-x)\,,$$

dove si è usata la proprietà della delta di Dirac per cui $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$, nel nostro caso $f(x) = e^{x}-1$ e quindi $f(0)=0$. Sottraendo a questo risultato l'espressione di $u(x)$, che abbiamo calcolato con il metodo di Green, si ottiene la funzione di ingresso, infatti

$$u'(x) - u(x) = -e^{x}\theta(-x) - [-e^{x}\theta(-x) - \theta(x)] = \theta(x)\,,$$

questo risultato dimostra che la funzione $u(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale.

Quinto problema (punteggio 3/30)

I vettori

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono due dei tre autovettori della matrice, 3×3, B. Sapendo che la matrice B è hermitiana e che gli autovalori sono

$$\beta_1 = 3\,, \qquad \beta_2 = -6\,, \qquad \beta_3 = 2\,,$$

per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$B\,b_k = \beta_k b_k\,, \qquad k = 1,2,3\,,$$

si determinino il terzo autovettore, b_3, e gli elementi della matrice B.

Soluzione del quinto problema

Poiché la matrice è hermitiana e gli autovalori sono distinti, gli autovettori corrispondenti sono ortogonali, quindi il terzo autovettore deve essere ortogonale ai primi due, già mutuamente ortogonali. Per ottenerne l'espressione matriciale, partiamo dalla forma generica

$$b_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e imponiamo le relazioni di ortogonalità

$$b_1^\dagger b_3 = x + y + z = 0\,, \qquad b_2^\dagger b_3 = x + y - 2z = 0\,, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}.$$

Scegliamo $x = 1$, infatti le condizioni di ortonormalità non sono sufficienti a definire completamente il vettore b_3,

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori normalizzati sono

$$b_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando le espressioni degli autovettori normalizzati otteniamo la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espressione della matrice B si ottiene a partire dalla rappresentazione diagonale

$$B_b = \mathrm{diag}(3, -6, 2)\,,$$

come

$$B = U B_d U^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

Data l'equazione integrale

$$f(x) = x + \beta \int_0^{\pi/2} \cos^2(x-y) f(y) dy \,,$$

si stabilisca per quali valori di $\beta \in \mathbb{C}$ ammette soluzione e la si determini esplicitamente nel caso $\beta = 4/\pi$.

Soluzione del sesto Problema

Si tratta di un'equazione integrale di Fredholm di secondo tipo con nucleo separabile, infatti, usando la relazione $\cos^2(\alpha) = (\cos(2\alpha)+1)/2$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{\beta}{2}\int_0^{\pi/2} \left[\cos(2x-2y)+1\right] f(y) dy \,, = x + \frac{\beta}{2}\int_0^{\pi/2} \left[\cos(2x)\cos(2y) + \mathrm{sen}(2x)\mathrm{sen}(2y) + 1\right] f(y) dy \\ &= x + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{3} M_k(x) \int_0^{\pi/2} N_k(y) f(y) dy \,, \end{aligned}$$

dove si sono definite le funzioni

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = \cos(2x) \qquad & N_1(y) = \cos(2y) \\ M_2(x) = \mathrm{sen}(2x) \qquad & N_1(y) = \mathrm{sen}(2y) \\ M_3(x) = 1 \qquad & N_3(y) = 1 \end{array} \,.$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione integrale per una generica $N_j(x)$, con $j = 1, 2, 3$, ed integriamo in dx tra 0 e $\pi/2$, si ottiene così l'identità matriciale

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2} N_j(x) f(x) dx}_{C_j} = \underbrace{\int_0^{\pi/2} N_j(x) x dx}_{B_j} + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{3} \underbrace{\int_0^{\pi/2} N_j(x) M_k(x) dx}_{A_{jk}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} N_k(y) f(y) dy}_{C_k} \,.$$

Abbiamo infatti definito la matrice 3×3 A, il vettore incognito C e il vettore termine noto B, entrambi 3×1. Gli elementi della matrice A sono

$$\begin{array}{lll} A_{11} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(2x) dx = \frac{\pi}{4} \,, & A_{12} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\mathrm{sen}(2x) dx = 0 \,, & A_{13} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = 0 \,, \\ A_{21} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(2x)\cos(2x) dx = 0 \,, & A_{22} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2(2x) dx = \frac{\pi}{4} \,, & A_{23} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(2x) dx = 1 \,, \\ A_{31} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = 0 \,, & A_{32} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(2x) dx = 1 \,, & A_{33} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2(2x) dx = \frac{\pi}{2} \,, \end{array}$$

quelli del vettore colonna B

$$B_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(2x) x dx = -\frac{1}{2} \,, \qquad B_2 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(2x) x dx = \frac{\pi}{4} \,, \qquad B_3 = \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{\pi^2}{8} \,.$$

Si hanno quindi le espressione esplicite della matrice A e del vettore B

$$A = \begin{pmatrix} \pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/4 & 1 \\ 0 & 1 & \pi/2 \end{pmatrix} \,, \qquad B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \pi/4 \\ \pi^2/8 \end{pmatrix} \,.$$

Il vettore C si ottiene come soluzione del sistema

$$\left(I - \frac{\beta}{2}A\right) C = B\,,$$

che ammette un'unica soluzione se

$$\det\left(I - \frac{\beta}{2}A\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\frac{\pi\beta}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\pi\beta}{8} & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & 1-\frac{\pi\beta}{4} \end{pmatrix} = \left(1-\frac{\pi\beta}{8}\right)\left[\left(1-\frac{\pi\beta}{8}\right)\left(1-\frac{\pi\beta}{4}\right) - \frac{\beta^2}{4}\right] \neq 0\,,$$

ovvero

$$\beta \neq \frac{8}{\pi}\,, \qquad \beta \neq \frac{-6\pi \pm 2\sqrt{\pi^2+64}}{\pi^2-8}\,.$$

Ne consegue che per $\beta = 4/\pi$, il valore assegnato, si ha un'unica soluzione.
La matrice dei coefficienti in questo caso è

$$\left(I - \frac{2}{\pi}A\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -2/\pi \\ 0 & -2/\pi & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Il vettore C si ottiene con il metodo di Cramer ed ha elementi

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ \pi/4 & 1/2 & -2/\pi \\ \pi^2/8 & -2/\pi & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -2/\pi \\ 0 & -2/\pi & 0 \end{pmatrix}} = \frac{2/\pi^2}{-2/\pi^2} = -1\,,$$

$$C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & \pi/4 & -2/\pi \\ 0 & \pi^2/8 & 0 \end{pmatrix}}{-2/\pi^2} = \frac{\pi/8}{-2/\pi^2} = -\frac{\pi^3}{16}\,,$$

$$C_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \pi/4 \\ 0 & -2/\pi & \pi^2/8 \end{pmatrix}}{-2/\pi^2} = \frac{\pi^2/32 + 1/4}{-2/\pi^2} = -\frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^2}{8}\,.$$

La soluzione $f(x)$ dell'equazione integrale è data, in termini del vettore C e delle funzioni $M_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, dalla relazione

$$f(x) = x + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{3} M_k(x)\int_0^{\pi/2} N_k(y) f(y)\,dy = x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{3} C_k M_k(x)\,,$$

sostituendo i valori degli elementi C_k si ha

$$f(x) = x - \frac{2}{\pi}\cos(2x) - \frac{\pi^2}{8}\mathrm{sen}(2x) - \frac{\pi}{32}\left(\pi^2+8\right)\,.$$