Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 16 gennaio 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale in valore principale

$$I = \mathrm{Pr}\int_\gamma \frac{dz}{(1+z^2)\,\mathrm{sen}\,(z)}\,,$$

con $\gamma = \{z : \mathrm{Re}(z) = t, \mathrm{Im}(z) = t^2, t \in (-\infty, \infty)\}$.

. . . .

Soluzione
Consideriamo il percorso chiuso: $\Gamma_{\epsilon,R} = \gamma_r \cup (-\gamma_\epsilon) \cup \gamma_+ \cup \gamma_R$, con

$$\begin{aligned}
\gamma_- &= \{z : \mathrm{Re}(z) = t, \mathrm{Im}(z) = t^2, t \in (-R, -\epsilon)\} \\
\gamma_+ &= \{z : \mathrm{Re}(z) = t, \mathrm{Im}(z) = t^2, t \in (\epsilon, R)\} \\
\gamma_\epsilon &= \{z : \mathrm{Re}(z) = t, \mathrm{Im}(z) = \sqrt{t^2-\epsilon^2}, t \in (-\tau_\epsilon, \tau_\epsilon)\} \\
\gamma_R &= \{z : \mathrm{Re}(z) = t, \mathrm{Im}(z) = \sqrt{t^2-R^2}, t \in (-\tau_R, \tau_R)\}\,,
\end{aligned}$$

e τ_α è la funzione

$$\tau_\alpha = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha^2}}{2}} \begin{cases} \displaystyle\xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} \alpha \\ \\ \displaystyle\xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \sqrt{\alpha} \end{cases}.$$

Tale percorso è composto da due rami di parabola $y = x^2$, con $x \in (-R, -\epsilon)$ e $x \in (\epsilon, R)$ e due archi centrati nell'origine, di raggi ϵ e R, che si estendono nel semipiano $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. L'integranda ha tre poli semplici nei punti

$$z_0 = 0\,, \qquad z_1 = +i\,, \qquad z_2 = -i\,,$$

il polo z_0 appartiene al cammino d'integrazione ed è quindi il punto su cui si calcola il valore principale. Dei due rimanenti, solo z_1 è all'interno di $\Gamma_{\epsilon,R}$. Usando il teorema dei residui, posto $f(z) = 1/[(1+z^2)\,\mathrm{sen}\,(z)]$, si ha

$$2i\pi\,\mathrm{Res}\,[f(z), z = z_1] = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = \mathrm{Pr}\int_\gamma f(z)dz - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz\,,$$

ne consegue che l'integrale iniziale è

$$I = 2i\pi\,\mathrm{Res}\,[f(z), z = z_1] + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz\,.$$

Consideriamo le quantità a secondo membro:

- il residuo nel punto $z_1 = i$ è

$$2i\pi \,\mathrm{Res}\,[f(z), z = z_1] = 2i\pi \lim_{z\to z_1}(z - z_1)f(z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,(i)} = -\frac{i\pi}{\mathrm{senh}\,(1)}\,;$$

- il contributo sull'arco di raggio R si annulla al divergere di R, possiamo usare il lemma di Jordan, e si ha

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)\,\mathrm{sen}\,(z)} = -\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{2i\,e^{iz}}{(1+z^2)}dz = 0\,.$$

- Infine, per l'integrale sull'arco infinitesimo, usiamo il lemma 4, avendo che

$$\lim_{\epsilon\to 0} z f(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{z}{(1+z^2)\,\mathrm{sen}\,(z)} = 1\,,$$

otteniamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz = i\pi\,,$$

essendo π l'angolo descritto nel limite $\epsilon \to 0$.

Mettendo insieme i tre risultati si ottiene l'integrale

$$I = -\frac{i\pi}{\mathrm{senh}\,(1)} + i\pi = i\pi\left[1 - \frac{1}{\mathrm{senh}\,(1)}\right]\,.$$

Un'altra possibilità, più laboriosa, è la seguente. Si consideri la sostituzione $z = w + iw^2$, per cui l'integrale diventa

$$I = \mathrm{Pr}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+2iw)dw}{[1+(w+iw^2)^2]\,\mathrm{sen}\,(w+iw^2)}\,,$$

dove il valore principale è calcolato nell'origine. Possiamo usare il lemma di Jordan, ovvero possiamo chiudere il cammino di integrazione sopra e aggirare l'origine da sotto, indichiamo con $\Gamma_{\epsilon,R}$ tale percorso, R è il raggio dell'arco grande ed ϵ quello dell'arco infinitesimo entrambi centrati nell'origine, si ha cioè

$$\Gamma_{\epsilon,R} = [-R,\epsilon]\cup\gamma_\epsilon\cup[\epsilon,R]\cup\gamma_R\,, \qquad \text{con:}\;\left\{\begin{array}{l}\gamma_\epsilon = \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta\in[\pi, 2\pi]\}\\ \gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta\in[0,\pi]\}\end{array}\right.\,.$$

Grazie al teorema dei residui, nei limiti $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_{\epsilon,R}}\frac{(1+2iw)dw}{[1+(w+iw^2)^2]\,\mathrm{sen}\,(w+iw^2)} &= 2i\pi\left[\sum_{\mathrm{Im}(w_k)>0}\mathrm{Res}[f(w),w_k] + \mathrm{Res}[f(w),0]\right]\\ &= \underbrace{\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\epsilon}[\ldots] + \int_{+\epsilon}^{+R}[\ldots]\right)}_{=I}\\ &\quad + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}[\ldots]}_{=0} + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}[\ldots]}_{=i\pi}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$I = 2i\pi \left[\sum_{\mathrm{Im}(w_k)>0} \mathrm{Res}[f(w), w_k] + \mathrm{Res}[f(w), 0] \right] - i\pi \,,$$

dove la summa è intesa su tutti i residui del semipiano superiore cui aggiungiamo quello relativo al polo nell'origine.
La funzione integranda ha solo poli semplici, questi corrispondono agli infiniti zeri del seno ed alle quattro radici del polinomio a denominatore. Gli zeri del seno si ottengono come soluzioni dell'equazione

$$w_k + i w_k^2 = k\pi \,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} \,,$$

che sono

$$w_k^{\pm} = \frac{i}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4ik\pi}\right) = \mp\sqrt{\lambda_k}\,\mathrm{sen}\,(\phi_k/2) + \frac{i}{2}\left[1 \pm \sqrt{\lambda_k}\cos(\phi_k/2)\right] ,$$

dove

$$\lambda_k = \sqrt{1 + 16k^2\pi^2} \geq 1 \,, \qquad \phi_k = \arctan(4k\pi) \in [0, \pi] \,,$$

rappresentano il modulo e l'argomento del numero complesso sotto radice. Per stabilire la posizione di questi poli e in particolare per stabilire la loro appartenenza al semipiano superiore, possiamo scrivere il coseno dell'angolo metà, sempre non nullo in questo caso, in funzione della tangente come

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{\cos(\alpha) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}{2\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}} \,,$$

ne consegue che la parte immaginaria di $w_k^{\pm}$ può essere scritta come

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(w_k^{\pm}) &= \frac{1 \pm \lambda_k \cos(\phi_k/2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + (4k\pi)^2}}{2}}\right] = \begin{cases} > 1 & \text{con il segno } + \text{ e con } k \neq 0 \\ = 1 & \text{con il segno } + \text{ e con } k = 0 \\ = 0 & \text{con il segno } - \text{ e con } k = 0 \\ < 0 & \text{con il segno } - \text{ e con } k \neq 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Al fine di includere tutti i poli del semipiano superiore, più l'origine, dobbiamo considerare tutti i valori di k con il segno $+$ e solo $k = 0$ con il segno $-$.
Quindi, per la parte della somma dei residui dovuti ai poli del seno, avremo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}[f(w), w_k^+] + \mathrm{Res}[f(w), w_0^-] \,,$$

dove il secondo è proprio quello nell'origine. I residui sono

$$
\begin{aligned}
R_k^+ = \mathrm{Res}[f(w), w_k^+] &= \lim_{w\to w_k^+} \frac{(1+2iw)(w-w_k^+)}{[1+(w+iw^2)^2]\,\mathrm{sen}\,(w+iw^2)} \\
&= \frac{1+2iw_k^+}{1+(w_k^+ + iw_k^{+2})^2} \lim_{w\to w_k^+} \frac{w-w_k^+}{\mathrm{sen}\,(w+iw^2)} \\
&= \frac{1+2iw_k^+}{1+(4k\pi)^2} \lim_{w\to w_k^+} \frac{1}{(1+2iw)\cos(w+iw^2)} \\
&= \frac{1+2iw_k^+}{1+(k\pi)^2} \lim_{w\to w_k^+} \frac{1}{(1+2iw)\cos(k\pi)} \\
&= \frac{(-1)^k}{1+(k\pi)^2}\,,
\end{aligned}
$$

ovviamente

$$
R_0^- = R_0^+ = 1\,.
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}[f(w), w_k^+] + \mathrm{Res}[f(w), w_0^-] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+(k\pi)^2} + 1 \\
&= 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+(k\pi)^2} + 1\right]\,.
\end{aligned}
$$

La serie può essere calcolata come segue, per prima cosa separiamo i termini pari e quelli dispari

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+(k\pi)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2k\pi)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(2k+1)^2\pi^2}\,.
$$

Partiamo dalla funzione meromorfa $g(z) = 1/\tanh(z/2)$ che ha come singolarità i poli semplici $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e i residui sono tutti uguali a 2. Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$
g(z) = \frac{1}{\tanh(z/2)} = h(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{z-2ik\pi} = h(z) + \frac{2}{z} + 4z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+(2k\pi)^2}\,,
$$

dove $h(z)$ è la funzione intera che descrive il comportamento asintotico. Poiché la funzione è costante asintoticamente $h(z)$ è costante, inoltre si ha

$$
\lim_{z\to 0} z g(z) = 2 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = 0\,.
$$

Valutando nel punto $z = 1$ e esplicitando rispetto alla serie si ha

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2k\pi)^2} = \frac{1}{4\tanh(1/2)} - \frac{1}{2}\,.
$$

Per ciò che riguarda la serie dispari usiamo lo stesso argomento con la funzione $g^{-1}(z) = \tanh(z/2)$ che ha poli semplici in $z_k = (2k+1)i\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo lo sviluppo di Mittag-Leffler, sapendo che, come per la funzione inversa, la parte intera è nulla,

$$\begin{aligned}
\tanh(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{z-(2k+1)i\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z-(2k+1)i\pi} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2}{z-(2k+1)i\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z-(2k+1)i\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z+(2k+1)i\pi} \\
&= 4z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z^2+(2k+1)^2\pi^2}\,,
\end{aligned}$$

da cui, posto $z = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{1+(2k+1)^2\pi^2} = \frac{\tanh(1/2)}{4}\,.$$

Quindi la somma dei residui può essere calcolata come

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}[f(w), w_k^+] + \mathrm{Res}[f(w), w_0^-] &= 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+(k\pi)^2} + 1\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{4\tanh(1/2)} - \frac{1}{2} - \frac{\tanh(1/2)}{4} + 1\right] \\
&= \frac{1/\tanh(1/2) - \tanh(1/2)}{2} + 1 \\
&= \frac{1}{\mathrm{senh}\,(1)} + 1\,.
\end{aligned}$$

Gli zeri del polinomio a denominatore si ottengono risolvendo l'equazione di quarto grado

$$w^{\pm} + i w^{\pm 2} = \pm i \qquad \to \qquad w^{\pm 2} - i w^{\pm} \mp 1 = 0$$

$$w_{1,2}^{\pm} = \frac{i \pm \sqrt{-1 \pm 4}}{2} \begin{cases} w_1^+ = (i+\sqrt{3})/2 \\ w_2^+ = (i-\sqrt{3})/2 \\ w_1^- = i(1+\sqrt{5})/2 \\ w_2^- = i(1-\sqrt{5})/2 \end{cases},$$

di questi quattro poli tre hanno parte immaginaria strettamente positiva e sono: w_1^+, w_2^+ e w_1^-.

I residui sono

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(w), w_1^+] = \mathrm{Res}[f(w), w_2^+] &= \lim_{w\to w_1^+} \frac{(1+2iw)(w-w_1^+)}{[1+(w+iw^2)^2]\,\mathrm{sen}\,(w+iw^2)} \\
&= \frac{1+2iw_1^+}{\mathrm{sen}\,(w+iw_1^{+2})} \lim_{w\to w_1^+} \frac{w-w_1^+}{1+(w+iw^2)^2} \\
&= \frac{1+2iw_1^+}{\mathrm{sen}\,(w_1^+ + iw_1^{+2})} \lim_{w\to w_1^+} \frac{1}{2(1+2iw)(w+iw^2)} \\
&= \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}\,(i)} = -\frac{1}{2\,\mathrm{senh}\,(1)} \\
\mathrm{Res}[f(w), w_1^-] &= \lim_{w\to w_1^-} \frac{(1+2iw)(w-w_1^-)}{[1+(w+iw^2)^2]\,\mathrm{sen}\,(w+iw^2)} \\
&= \frac{1}{-2i\,\mathrm{sen}\,(-i)} = -\frac{1}{2\,\mathrm{senh}\,(1)}\,.
\end{aligned}
$$

L'integrale iniziale è dunque:

$$
\begin{aligned}
I &= 2i\pi\left[\sum_{\mathrm{Im}(w_k)>0} \mathrm{Res}[f(w), w_k] + \mathrm{Res}[f(w), 0]\right] - i\pi \\
&= 2i\pi\left[\frac{1}{\mathrm{senh}\,(1)} + 1 - \frac{3}{2\,\mathrm{senh}\,(1)}\right] - i\pi \\
&= i\pi\left[1 - \frac{1}{\mathrm{senh}\,(1)}\right]\,.
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$
f(z) = \frac{(z-a)z^n}{z^n + b^n}\,,
$$

con: $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 < a < b$.

. . . .

Soluzione
La funzione è meromorfa, ha un numero finito, n, di poli semplici:

$$
z_k = b e^{i\pi(1+2k)/n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.
$$

Ha, inoltre $n+1$ zeri:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 0\,, \qquad & m_0 &= n\,, \\
w_1 &= a\,, \qquad & m_1 &= 1\,,
\end{aligned}
$$

dove m_j indica la molteplicità dello zero w_j. I residui dei poli sono

$$R_k = \text{Res}[f(z), z_k] = \frac{(z_k - a)z_k^n}{n z_k^{n-1}} = \frac{(z_k - a)z_k}{n} \,.$$

La funzione $f(z)$ può essere scritta come

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z - z_k} \,,$$

dove $g(z)$ è una funzione intera che ha lo stesso comportamento asintotico della $f(z)$ al divergere di z, ovvero

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} z \,.$$

Da qui si evince che $g(z)$ è un polinomio di primo grado: $g(z) = A + Bz$. I coefficienti A e B si ottengono valutando la funzione $f(z)$ in punti in cui se ne conosce facilmente il valore, scegliamo $z = 0$ e $z = a$:

$$0 = f(0) = g(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{-z_k} = A - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k} \qquad \Rightarrow \qquad A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k} \,,$$

$$0 = f(a) = g(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{a - z_k} = A + aB + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{a - z_k} \qquad \Rightarrow \qquad B = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k(a - z_k)} \,.$$

Quindi si ha per $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k} - z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k(a - z_k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z - z_k} \\ &= z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k(z - z_k)} - z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k}{z_k(a - z_k)} \\ &= z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k(a - z)}{z_k(z - z_k)(a - z_k)} \,. \end{aligned}$$

....

Esercizio 3 (6 punti)
Si determinino i coefficienti delle serie di Laurent in $z = -1$ e $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^{3z}}{(z + 1)^2}$$

e i rispettivi domini di convergenza.

....

Soluzione

Nel punto $z=-1$ la funzione ha un polo doppio. I coefficienti di Laurent possono essere determinati in due modi: direttamente usando la rappresentazione integrale di Cauchy o sfruttando lo sviluppo in serie dell'esponenziale. Nel primo caso si ha

$$C_k^{(-1)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_{-1}} \frac{f(z)}{(z+1)^{k+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_{-1}} \frac{e^{3z}}{(z+1)^{k+3}}dz = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{(k+2)!}\dfrac{d^{k+2}}{dz^{k+2}}e^{3z}\right|_{z=-1} & k \geq -2 \\ 0 & k < -2 \end{cases} ,$$

da cui, calcolando le derivate dell'esponenziale,

$$C_k^{(-1)} = \begin{cases} \dfrac{3^{k+2}}{(k+2)!}e^{-3} & k \geq -2 \\ 0 & k < -2 \end{cases} .$$

La serie ha una parte principale con soli due termini, quindi la corona che rappresenta il dominio di convergenza ha come raggio interno $r=0$, mentre quello esterno, R, si ottiene applicando la formula di Cauchy-Hadamard alla parte regolare. Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{3^{k+2}}{(k+2)!}e^{-3}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3^k}{k!}\right)^{1/k} e^{-3/k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3^k}{k!}\right)^{1/k} = 3\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(k!)^{1/k}} = 0\,,$$

infatti l'ultimo limite dà l'inverso del raggio di convergenza dello sviluppo dell'esponenziale che sappiamo essere nullo essendo il raggio infinito. Possiamo vederlo anche come

$$\lim_{k\to\infty}(k!)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}\ln(k!)} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k}\ln(h)} \simeq \lim_{k\to\infty} e^{[\ln(k)-1]} \simeq \lim_{k\to\infty} e^{\ln(k)} = \infty\,.$$

La serie di Laurent è

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{e^{-3}3^{k+2}}{(k+2)!}(z+1)^k$$

ed ha come dominio di convergenza

$$D_{-1} = \{z : |z+1| > 0\}\,,$$

ovvero, tutto il piano complesso ad eccezione di $z=-1$.
Sfruttando lo sviluppo in serie dell'esponenziale si ha

$$f(z) = \frac{e^{3z}}{(z+1)^2} = e^{-3}\frac{e^{3(z+1)}}{(z+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-3}3^k}{k!}(z+1)^{k-2} = \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{e^{-3}3^{k+2}}{(k+2)!}(z+1)^k\,.$$

Nel punto $z=0$ i coefficienti sono

$$C_k^{(0)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{e^{3z}}{(z+1)^2 z^{k+1}}dz = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k}{dz^k}\dfrac{e^{3z}}{(z+1)^2}\right|_{z=0} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} .$$

Per calcolare l'integrale sfruttiamo la convergenza uniforme della serie dell'esponenziale, cioè

$$C_k^{(0)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{e^{3z}}{(z+1)^2 z^{k+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^j}{j!}\oint_{\gamma_0}\frac{dz}{(z+1)^2 z^{k-j+1}}$$
$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{3^j}{j!(k-j)!}\,\frac{d^{k-j}}{dz^{k-j}}\frac{1}{(z+1)^2}\bigg|_{z=0}$$
$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{3^j}{j!(k-j)!}(-1)^{k-j}(k-j+1)!$$
$$= (-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-3)^j(k-j+1)}{j!}\,, \qquad k=0,1,\dots\,.$$

La serie di Laurent (Taylor) è

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-3)^j(k-j+1)}{j!}\,z^k\,,$$

il raggio di convergenza è $r=1$, lo si evince dal fatto che la singolarità più vicina al centro $z=0$ è il polo doppio $z=-1$. Possiamo anche usare la formula di Cauchy-Hadamard. Il comportamento asintotico, per $k\to\infty$, del coefficiente $C_k^{(0)}$ può essere studiato separando i tre contributi:

$$C_k^{(0)} = (-1)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-3)^j(k-j+1)}{j!} = (-1)^k\left[k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-3)^j}{j!} + 3\sum_{j=1}^{k}\frac{(-3)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=0}^{k}\frac{(-3)^j}{j!}\right]\,,$$

per grandi valori di k ciascun contributo tende ad una quantità proporzionale a e^{-3}, infatti

$$\lim_{k\to\infty}C_k^{(0)} \simeq \lim_{k\to\infty}(-1)^k\left[k\,e^{-3}+3\,e^{-3}+\,e^{-3}\right] \simeq e^{-3}\lim_{k\to\infty}(-1)^k\,k\,.$$

Con la formula di Cauchy-Hadamard si ha

$$r^{-1} = \limsup_{k\to\infty}\left|C_k^{(0)}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}e^{-3/k}k^{1/k} = \lim_{k\to\infty}e^{[-3+\ln(k)]/k} = 1\,.$$

Per cui il dominio della seconda serie è

$$D_0 = \{z : |z| < 1\}\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \arctan(x/a)\,,$$

con a reale e $a > 0$.

. . . .

Soluzione
Si può sfruttare la relazione

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{df}{dx}\right] = ik\mathcal{F}_k\left[f\right] .$$

Abbiamo infatti che

$$\frac{df}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2} ,$$

quindi

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{df}{dx}\right] = \mathcal{F}_k\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|k|a} = ik\mathcal{F}_k\left[f\right] ,$$

da cui:

$$\mathcal{F}_k\left[f\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-|k|a}}{ik} .$$

. . . .

Esercizio 5 (5 punti)

- Siano: $|u_n\rangle_{n=-\infty}^{\infty}$ un insieme ortonormale e completo di vettori dello spazio di Hilbert H e $\hat{T}$ un operatore definito da
$$\hat{T}|u_n\rangle = |u_{n+1}\rangle + |u_n\rangle .$$
Trovare, se esistono, gli autovettori di $\hat{T}$ (si sfrutti l'identità di Parseval).

- Sapendo che l'insieme delle funzioni
$$f_k(x) = e^{ikx}$$
con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, è completo in $L^2(-\pi, \pi)$, si verifichi l'eventuale completezza dell'insieme $\{x^2 f_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

. . . .

Soluzione

- Un vettore generico $|v\rangle \in H$ può essere scritto come
$$|v\rangle = \sum_k v_k |u_k\rangle , \qquad v_k = \langle u_k|v\rangle .$$

Assumiamo che $|v\rangle$ sia autovettore di $\hat{T}$ con autovalore λ, ovvero

$$\begin{aligned}
\hat{T}|v\rangle &= \lambda|v\rangle \\
\sum_k \hat{T}v_k|u_k\rangle &= \lambda\sum_k v_k|u_k\rangle \\
\sum_k v_k(|u_{k+1}\rangle + |u_k\rangle) &= \lambda\sum_k v_k|u_k\rangle \\
\sum_k (v_{k-1}+v_k)|u_k\rangle &= \lambda\sum_k v_k|u_k\rangle \\
(\lambda-1)v_k &= v_{k-1}\,.
\end{aligned}$$

Da quest'ultima possiamo dedurre tutti i coefficienti in funzione di v_0, che, ad esempio, assumiamo diverso da zero, si ha

$$\begin{array}{ll}
v_1 = \dfrac{v_0}{\lambda-1} & v_{-1} = v_0(\lambda-1) \\
v_2 = \dfrac{v_1}{\lambda-1} = \dfrac{v_0}{(\lambda-1)^2} & v_{-2} = v_0(\lambda-1)^2 \\
v_3 = \dfrac{v_0}{(\lambda-1)^3} & v_{-3} = v_0(\lambda-1)^3 \\
\dots & \dots
\end{array}\,.$$

Quindi il modulo del vettore $|v\rangle$, espresso per mezzo dell'identità di Parseval, è

$$\begin{aligned}
\langle v|v\rangle &= |v_0|^2\left[\dots + |1-\lambda|^4 + |1-\lambda|^2 + 1 + \frac{1}{|1-\lambda|^2} + \frac{1}{|1-\lambda|^4} + \dots\right] \\
&= |v_0|^2\left[\sum_{k=0}^{\infty}|1-\lambda|^{2k} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty}|1-\lambda|^{-2k}\right],
\end{aligned}$$

le condizioni di convergenza per le due serie sono disgiunte, ovvero

$$|1-\lambda| < 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{|1-\lambda|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |1-\lambda| > 1\,,$$

ne consegue che non esiste alcun autovettore.

- Per verificare la completezza dell'insieme $\{x^2 f_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{g_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ consideriamo una funzione $q(x)$ tale che

$$0 = (g_k(x), q(x)) = (f_k(x)x^2, q(x)) = (f_k(x), x^2 q(x))\,,$$

poiché il sistema delle $f_k(x)$ è completo si ha che l'identità vale se e solo se

$$x^2 q(x) = \text{q.d.n.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q(x) = \text{q.d.n.}\,,$$

da cui la completezza dell'insieme $\{g_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- classificarla;
- calcolarne autovalori e autovettori;
- determinare un insieme di matrici P_j, componenti del 3-vettore $\vec{P}$, che verifica la relazione

$$A = \vec{\lambda} \cdot \vec{P}$$

dove $\vec{\lambda}$ è il 3-vettore le cui componenti λ_j, $j = 1, 2, 3$, sono gli autovalori di A;

- calcolare, infine, la matrice $\vec{P}^2$.

. . . .

Soluzione

- La matrice è hermitiana, ha determinante e traccia nulli.
- L'equazione secolare è

$$\det[A - I\lambda] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 1 \\ i & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda = 0\,,$$

da cui

$$\lambda_1 = -\sqrt{2}\,, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\,, \quad \lambda_3 = 0\,.$$

Gli autovettori sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ i/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ovvero

$$A' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U^\dagger A U\,.$$

- Si ha che

$$A' = U^\dagger A U = U^\dagger(\vec{\lambda}\cdot\vec{A})U = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j U^\dagger P_j U = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j P'_j\,,$$

la scelta più conveniente è

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad P'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Le matrici P_j si ottengono con le trasformazioni inverse

$$P_j = U P'_j U^\dagger\,, \qquad j = 1, 2, 3\,,$$

in particolare

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & i/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -i/2\sqrt{2} & 1/4 & i/4 \\ -1/2\sqrt{2} & -i/4 & 1/4 \end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ i/2\sqrt{2} & 1/4 & i/4 \\ 1/2\sqrt{2} & -i/4 & 1/4 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & 1/2 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/2 & i/2 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

- Le matrici P_j sono dei proiettori, infatti, in notazione *bracket*, ritornando alla descrizioni *astratta* dello spazio vettoriale, si ha

  $$\hat{P}_j = |u_j\rangle\langle u_j| \,, \qquad j = 1, 2, 3 \,,$$

  da cui la rappresentazione matriciale, nella base degli autovettori,

  $$(P'_j)kl = \langle u_k|u_j\rangle\langle u_j|u_l\rangle = \delta_{kj}\delta_{jl} \,,$$

  fissato j, un solo elemento è diverso da zero e uguale a uno: P'_{jj}. Gli operatori $\hat{P}_j$ sono proiettori e quindi sono idem-potenti. Ne consegue che $\hat{P}_j^n = \hat{P}_j$, con $j = 1, 2, 3$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tali identità valgono anche in ogni rappresentazione matriciale. Per cui avremo

  $$\vec{P}^2 = \sum_{j=1}^{3} P_j^2 = \sum_{j=1}^{3} P_j = \sum_{j=1}^{3} U P'_j U^\dagger = U \left(\sum_{j=1}^{3} P'_j \right) U^\dagger = U I U^\dagger = I \,.$$

  Lo si può evincere anche in notazione astratta, usando le relazione di completezza della base $\{|u_j\rangle\}$:

  $$\sum_{j=1}^{3} \hat{P}_j^2 = \sum_{j=1}^{3} |u_j\rangle\langle u_j|u_j\rangle\langle u_j| = \sum_{j=1}^{3} |u_j\rangle\langle u_j| = \hat{I} \,.$$