Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario invernale - 16 dicembre 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver dimostrato che la funzione

$$\text{✿}(x,y) = e^{\cos(x)\cosh(y)} \cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right),$$

definita in $\mathbb{R}^2$, è armonica, si calcoli la funzione $f(z)$, di variabile complessa $z = x + iy$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, che verifica le due condizioni

$$\operatorname{Im}(f(0)) = 0\,, \qquad \operatorname{Re}(f(z)) = \text{✿}(x,y)\,.$$

Soluzione del primo problema

Condizione necessaria affinché la funzione $\text{✿}(x,y)$ sia la parte reale di una funzione analitica è che sia armonica, ovvero sia soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \text{✿}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \text{✿}}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

Calcoliamo le derivate parziali seconde, per quella rispetto alla x si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \text{✿}}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \text{✿}}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big[-\operatorname{sen}(x)\cosh(y)\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) - \cos(x)\operatorname{senh}(y)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\Big] e^{\cos(x)\cosh(y)}\\
&= \Big[\operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y)\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\\
&\quad -\cos(x)\cosh(y)\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\\
&\quad + \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) - \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y)\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\Big] e^{\cos(x)\cosh(y)}\\
&= \Big[\operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y) - \cos(x)\cosh(y) - \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y)\Big]\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) e^{\cos(x)\cosh(y)}\\
&\quad + \Big[2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\Big]\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right) e^{\cos(x)\cosh(y)}\,,
\end{aligned}$$

mentre quella rispetto alle y è

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \text{❁}}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \text{❁}}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big[\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cos\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) - \operatorname{sen}(x)\cosh(y)\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big)\Big]e^{\cos(x)\cosh(y)} \\
&= \Big[\cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y)\cos\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y)\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) \\
&\qquad + \cos(x)\cosh(y)\cos\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y)\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) \\
&\qquad - \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big) - \operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y)\cos\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big)\Big]e^{\cos(x)\cosh(y)} \\
&= \Big[-\operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y) + \cos(x)\cosh(y) + \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y)\Big]\cos\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big)\,e^{\cos(x)\cosh(y)} \\
&\qquad + \Big[-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\operatorname{senh}(y)\cosh(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\Big]\operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\big)\,e^{\cos(x)\cosh(y)}.
\end{aligned}
$$

Le derivate parziali seconde sono evidentemente opposte, quindi la funzione $\text{❁}(x,y)$ verifica l'equazione di Laplace nelle due variabili x e y, ed è quindi una funzione armonica.
Per ottenere la funzione analitica $f(z)$, di cui $\text{❁}(x,y)$ rappresenta la parte reale, usiamo la formula

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 2\text{❁}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - \text{❁}(0,0) = 2\text{❁}\left(\frac{z}{2},-i\frac{z}{2}\right) - \text{❁}(0,0) = 2e^{\cos(z/2)\cosh(-iz/2)}\cos\big(\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{senh}(-iz/2)\big) - e \\
&= 2e^{\cos(z/2)\cos(z/2)}\cos\big(-i\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{sen}(z/2)\big) - e = 2e^{\cos^2(z/2)}\cosh\big(\operatorname{sen}^2(z/2)\big) - e \\
&= 2e^{\cos^2(z/2)}\frac{e^{\operatorname{sen}^2(z/2)} + e^{-\operatorname{sen}^2(z/2)}}{2}\cosh\big(\operatorname{sen}^2(z/2)\big) - e = e^{\operatorname{sen}^2(z/2)+\cos^2(z/2)} + e^{\cos^2(z/2)-\operatorname{sen}^2(z/2)} - e \\
&= e + e^{\cos(z)} - e\,,
\end{aligned}
$$

da cui il risultato finale

$$
f(z) = e^{\cos(z)}.
$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
\text{☸} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh^5(x)}.
$$

Soluzione del secondo problema

Consideriamo il percorso d'integrazione rettangolare

$$
\Gamma_R = [-R,R]\cup[R,R+i\pi]\cup[R+i\pi,-R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R],
$$

dove il simbolo $[z_1,z_2]$ indica il segmento rettilineo con estremi z_1 e z_2 orientato nel verso che va dal primo al secondo estremo. Il rettangolo Γ_R avvolge una volta la sola singolarità della funzione integranda, il polo di ordine cinque in $z_0 = i\pi/2$. Ne consegue che

$$
\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{\cosh^5(z)} = 2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\cosh^5(z)},\frac{i\pi}{2}\right].
$$

Inoltre, considerando i quattro contributi sui lati paralleli agli assi, si ha

$$
\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{\cosh^5(z)} &= \int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^5(x)} + \int_{R}^{-R}\frac{dx}{\cosh^5(x+i\pi)} + i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^5(R+iy)} - i\int_{\pi}^{0}\frac{dy}{\cosh^5(-R+iy)} \\
&= \int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^5(x)} + \int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^5(x)} + i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^5(R+iy)} + i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^5(-R+iy)} \\
&= 2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^5(x)} + i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^5(R+iy)} + i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^5(-R+iy)},
\end{aligned}
$$

nella seconda identità abbiamo usato la formula di somma $\cosh(x+i\pi) = -\cosh(x)$. Le prima espressione dell'integrale sul rettangolo Γ_R non dipende da R, quindi, nel limite $R \to \infty$, si ottiene l'identità

$$2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^5(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^5(x)} + i \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(R+iy)} + \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(-R+iy)}\right),$$

da cui il valore cercato

$$\circledast = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^5(x)} = i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^5(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] - \frac{i}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(R+iy)} + \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(-R+iy)}\right).$$

Verifichiamo che i limiti degli integrali sui lati verticali del rettangolo sono nulli, limitandone il modulo come segue

$$\begin{aligned}
0 \le \left|\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(\pm R+iy)}\right| \le \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left|\cosh^5(R+iy)\right|^5} &= \int_0^{\pi} \frac{dy}{|\cosh(R)\cos(y) + i\,\mathrm{senh}(R)\,\mathrm{sen}(y)|^5} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left(\cosh^2(R)\cos^2(y) + \mathrm{senh}^2(R)\,\mathrm{sen}^2(y)\right)^{5/2}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left[\cosh^2(R)\cos^2(y) + \mathrm{senh}^2(R)\,(1-\cos^2(y))\right]^{5/2}} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left(\cos^2(y) + \mathrm{senh}^2(R)\right)^{5/2}} \le \int_0^{\pi} \frac{dy}{\mathrm{senh}^5(R)},
\end{aligned}$$

nell'ultima disuguaglianza si è usata la maggiorazione: $\left(\cos^2(y) + \mathrm{senh}^2(R)\right)^{5/2} \ge \mathrm{senh}^5(R)$, in definitiva

$$0 \le \left|\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(\pm R+iy)}\right| \le \frac{\pi}{\mathrm{senh}^5(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^5(\pm R+iy)} = 0.$$

L'integrale cercato è quindi proporzionale al residuo in $z = i\pi/2$, ovvero

$$\circledast = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^5(x)} = i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^5(z)}, \frac{i\pi}{2}\right].$$

Otteniamo il valore del residuo come coefficiente C_{-1} della serie di Laurent della funzione integranda centrata in $z = i\pi/2$, che calcoliamo avvalendoci della serie di Taylor della funzione coseno iperbolico. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh^5(z)} &= \frac{1}{\cosh^5(z - i\pi/2 + i\pi/2)} = \frac{1}{(\cosh(z-i\pi/2)\cos(\pi/2) + i\,\mathrm{senh}(z-i\pi/2)\,\mathrm{sen}(\pi/2))^5} \\
&= \frac{(-i)^5}{\mathrm{senh}^5(z-i\pi/2)} = -\frac{i}{\mathrm{senh}^5(z-i\pi/2)} = -\frac{i}{\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z-i\pi/2)^{2k+1}/(2k+1)!\right]^5} \\
&= -\frac{i}{[z-i\pi/2 + (z-i\pi/2)^3/3! + (z-i\pi/2)^5/5! + \cdots]^5} \\
&= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\frac{1}{[1 + (z-i\pi/2)^2/3! + (z-i\pi/2)^4/5! + \cdots]^5} \\
&= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[1 - \left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right]^5,
\end{aligned}$$

l'ultima identità si ottiene dalla somma della serie geometrica di ragione $\left((z-i\pi/2)^2/3! + (z-i\pi/2)^4/5! + \cdots\right)$. Al fine di calcolare il coefficiente C_{-1} è necessario considerare il coefficiente del termine $(z-i\pi/2)^4$ che si ottiene dalla quinta potenza del fattore in parentesi quadra. Solo le potenze minori o uguali a quattro del binomio $(z-i\pi/2)$ possono contribuire

$$\frac{1}{\cosh^5(z)} = -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[1 - \frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} - \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!}\right)^2 + \cdots\right]^5,$$

dove, a parte l'unità, la potenza due e la prima potenza quattro sono date dal termine al primo ordine della serie geometrica, mentre la seconda potenza quattro deriva dal termine al secondo ordine. Eseguendo l'elevamento alla quinta si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh^5(z)} &= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[\binom{5}{2}\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!}\right)^2 - \binom{5}{1}\frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \binom{5}{1}\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!}\right)^2 + \cdots\right]\\
&= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[(z-i\pi/2)^4\left(\binom{5}{2}\frac{1}{(3!)^2} - \binom{5}{1}\frac{1}{5!} + \binom{5}{1}\frac{1}{(3!)^2}\right) + \cdots\right]\\
&= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[(z-i\pi/2)^4\left(\frac{5!}{2!(3!)^3} - \frac{1}{4!} + \frac{5}{(3!)^2}\right) + \cdots\right]\\
&= -\frac{i}{(z-i\pi/2)^5}\left[\frac{3}{8}(z-i\pi/2)^4 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Il coefficiente C_{-1}, ovvero il residuo è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^5(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = C_{-1} = -\frac{3i}{8}\,,$$

da cui l'integrale cercato

$$\text{☸} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

Un altro metodo per risolvere il secondo problema

Facciamo la sostituzione $w = e^x$, ovvero: $x = \ln(w)$ e $dx = dw/w$, quindi si ha

$$\text{☸} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh^5(x)} = \int_0^{\infty}\frac{2^5}{(w+1/w)^5}\frac{dw}{w} = 2^4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^4}{(1+w^2)^5}dw\,,$$

l'ultima indennità, in cui il percorso d'integrazione è esteso a tutto l'asse reale, segue dalla parità della funzione integranda. La funzione integranda ha come uniche singolarità due poli di ordine cinque nei punti $z_\pm = \pm i$. Consideriamo il percorso chiuso nel piano complesso z

$$\Omega_R = [-R,R] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]\right\} \equiv [-R,R]\cup C_R^+\,,$$

dove si è posto $C_R^+ = \left\{z : z = Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]\right\}$. L'integrale su tale percorso della stessa funzione integranda può essere calcolato con il teorema dei residui e si ha, indipendentemente dal valore di R purché sia $R > 1$,

$$\oint_{\Omega_R}\frac{z^4}{(1+z^2)^5}dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(1+z^2)^5}, i\right].$$

Calcoliamo il residuo come il coefficiente C_{-1} della serie di Laurent centrata in $z = i$, sfruttando la somma della serie geometrica. In particolare si ha che, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ e $|\alpha| < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\alpha)^n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\frac{1}{1+\alpha} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha^k\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)(-1)^k\alpha^{k-n+1}\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

La funzione integranda può essere scritta come

$$\begin{aligned}
\frac{z^4}{(1+z^2)^5} &= \frac{(z-i+i)^4}{(z-i)^5\,(z+i)^5} = \frac{(z-i+i)^4}{(z-i)^5\,(2i+z-i)^5} = \frac{(z-i+i)^4}{(2i)^5\,(z-i)^5\,(1+(z-i)/(2i))^5}\,,\\
&= \frac{(z-i+i)^4}{2^5 i\,(z-i)^5\,(1+(z-i)/(2i))^5}\,,
\end{aligned}$$

l'ultima identità segue avendo $i^4 = 1$, facendo, inoltre, uso de:

- la formula del binomio di Newton per il polinomio a numeratore

$$
(z-i+i)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (z-i)^j i^{4-j} = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (z-i)^j i^{-j} \,;
$$

- la derivata quarta della somma della serie geometrica di ragione $-(z-i)/(2i)$, con $|(z-i)/(2i)| < 1$, nel limite $z \to i$, per il fattore $(1+(z-i)/(2i))^{-5}$, per il quale usiamo la formula di Eq .(1) con $n=5$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+(z-i)/(2i))^5} &= \frac{(-1)^4}{4!} \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)(-1)^k \frac{(z-i)^{k-4}}{(2i)^{k-4}} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)(-1)^k \frac{(z-i)^{k-4}}{2^k i^k} \,;
\end{aligned}
$$

si ottiene la serie di Laurent centrata in $z = i$ e convergente nella corona circolare $\{z : 0 < |z-i| < 1\}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{z^4}{(1+z^2)^5} &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^4 i} \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} k(k-1)(k-2)(k-3)(-1)^k \frac{(z-i)^{k+j-9}}{2^k i^{k+j}} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{j=0}^{4} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(-1)^k}{j!(4-j)! 2^k i^{k+j}} (z-i)^{k+j-9} \\
&= \sum_{l=-5}^{\infty} C_l (z-i)^l \,.
\end{aligned}
$$

Il residuo coincide con il coefficiente della potenza $(z-i)^{-1}$, che è dato dalla serie con la sostituzione della potenza $(z-i)^{k+j-9}$ con la delta di Kronecker $\delta_{k+j-9,-1} = \delta_{k+j,8}$,

$$
\begin{aligned}
C_{-1} &= \frac{1}{2i} \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{j=0}^{4} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(-1)^k}{j!(4-j)! 2^k i^{k+j}} \delta_{k+j,8} = \{k = 8-j\} = \frac{1}{2i} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{4} \frac{(8-j)(7-j)(6-j)(5-j)(-1)^j}{j!(4-j)! 2^{8-j} i^8} = \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{4} \frac{(8-j)(7-j)(6-j)(5-j)(-1)^j}{j!(4-j)! 2^{8-j}} \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4! 2^8} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3! 2^7} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2! 2! 2^6} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3! 2^5} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4! 2^4} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2^{11}} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2^8} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2^8} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2^6} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2^7} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{7 \cdot 5}{2^7} - \frac{7 \cdot 5}{2^5} + \frac{5 \cdot 3^2}{2^5} - \frac{5}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \frac{35 - 140 + 180 - 80 + 8}{2^7} \,,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
C_{-1} = \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(1+z^2)^2}, i \right] = -\frac{3i}{2^8} \,.
$$

L'integrale sul percorso Γ_R vale

$$
\oint_{\Gamma_R} \frac{z^4}{(1+z^2)^5} dz = 2i\pi C_{-1} = \frac{3\pi}{2^7} \,.
$$

Lo stesso integrale nel limite $R \to \infty$ può essere scritto come

$$
\frac{3\pi}{2^7} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^4}{(1+z^2)^5} dz = \frac{\text{☸}}{2^4} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{z^4}{(1+z^2)^5} dz \,.
$$

Dimostriamo che il valore limite dell'integrale su C_R^+ è nullo verificando che, con $z \in \mathbb{C}_R^+$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z^4}{(1+z^2)^5} z = \lim_{R\to\infty} \frac{z^5}{(1+z^2)^5} \overset{\text{U.}}{=} 0\,.$$

Per valori di $z \in C_R^+$, cioè con $z = Re^{i\theta}$ e $\theta \in [0, \pi]$, si ha la maggiorazione

$$0 \le \left| \frac{z^5}{(1+z^2)^5} \right| = \frac{|z|^5}{|1+z^2|^5} \le \frac{|z|^5}{||z|^2-1|^5} = \frac{R^5}{|R^2-1|^5} \{R>1\} = \frac{R^5}{(R^2-1)^5} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

che implica l'annullamento del limite uniforme e di quello dell'integrale sulla semi-circonferenza C_R^+. Dall'equazione che si ottiene considerando il primo e l'ultimo membro dell'ultima espressione della pagina precedente, si ha

$$\frac{3\pi}{2^7} = \frac{☸}{2^4}\,,$$

quindi il risultato finale

$$☸ = \frac{3\pi}{8}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la somma della serie

$$\Coathanger = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2\,(k^2+1)}\,.$$

Soluzione del terzo problema

Utilizziamo il metodo dei residui. Definiamo, quindi, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2\,(z^2+1)}\,,$$

in termini della quale riscriviamo la serie a segni alterni come

$$\Coathanger = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f(k)\,.$$

La funzione $f(z)$ è meromorfa, ha un polo doppio nell'origine $z_0 = 0$ e due poli semplici in $z_\pm = \pm i$. Definiamo altresì la funzione di lavoro

$$F(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} f(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{z^2\,(z^2+1)}\,,$$

anch'essa meromorfa. L'insieme dei poli della funzione $F(z)$ è $\{z_- = -i, z_+ = i\} \cup \{z_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, i cui elementi sono i poli semplici dovuti alla presenza della funzione seno a denominatore, unitamente all'origine che è un polo anche della funzione $f(z)$. Tutti i poli, ad eccezione dell'origine che rappresenta per la funzione $F(z)$ un polo triplo, essendo di ordine due per la funzione $f(z)$ e semplice per l'inverso della funzione seno, sono semplici. Ne consegue che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} F(z) dz = \operatorname{Res}[F(z), -i] + \operatorname{Res}[F(z), i] + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}[F(z), k]\,.$$

I residui nei poli semplici $z_\pm = \pm i$, sono

$$\operatorname{Res}[F(z), \pm i] = \lim_{z\to\pm i} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z \mp i}{z^2\,(z^2+1)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pm i\pi)} \frac{1}{i^2\,(\pm 2i)} = \frac{i\pi}{2\operatorname{sen}(i\pi)} = \frac{\pi}{2\operatorname{senh}(\pi)}\,.$$

I residui nei poli semplici $z_k = k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sono

$$\operatorname{Res}[F(z), k] = \lim_{z\to k} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z-k}{z^2\,(z^2+1)} = \frac{(-1)^k}{k^2\,(k^2+1)}\,.$$

Il residuo nell'origine, che rappresenta un polo triplo, può essere ottenuto usando due procedure diverse. La prima consiste nel calcolarlo direttamente come il valore della metà della derivata seconda nell'origine, cioè

$$\operatorname{Res}[F(z),0] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{z}{z^2+1}\,.$$

La seconda prevede invece di ottenere lo stesso valore come il coefficiente "−1" della serie di Laurent della funzione $F(z)$ centrata nell'origine. Poiché il calcolo del limite nell'origine della derivata seconda ha qualche insidia tecnica dovuta alla presenza di molteplici cancellazioni, utilizziamo la seconda procedura basata sulla serie di Laurent i cui primi coefficienti possono essere ottenuti sfruttando la serie di Taylor della funzione seno e la somma della serie geometrica. Nel limite $z\to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{z^2\,(z^2+1)} = \frac{\pi}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\pi z)^{2j+1}/(2j+1)!}\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}\\
&= \frac{\pi}{\pi z\,(1-\pi^2 z^2/3!+\pi^4 z^4/5!\cdots)}\frac{1}{z^2}\left(1-z^2+z^4+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\pi^2 z^2/3!+\pi^4 z^4/5!\cdots}\left(1-z^2+z^4+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{z^3}\left[1-\left(\frac{\pi^2 z^2}{3!}-\frac{\pi^4 z^4}{5!}\cdots\right)+\left(\frac{\pi^2 z^2}{3!}-\frac{\pi^4 z^4}{5!}\cdots\right)^2+\cdots\right]\left(1-z^2+z^4+\cdots\right),
\end{aligned}$$

dobbiamo considerare il coefficiente del termine z^2 che si ottiene dal prodotto del termine in parentesi quadra e dell'ultimo in parentesi tonda. I termini della parentesi quadra che possono contribuire sono solo la costante e la stessa potenza z^2 della prima parentesi tonda, poiché il termine dell'ultima parentesi tonda, che moltiplica la quadra, contiene, oltre alla costante, solo potenze pari. Scrivendo esplicitamente solo i termini che ci interessano, si ha

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{z^3}\left(1+\frac{\pi^2 z^2}{3!}+\cdots\right)\left(1-z^2+\cdots\right) = \frac{1}{z^3}\left(-z^2+\frac{\pi^2 z^2}{3!}+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{z}\left(-1+\frac{\pi^2}{6}\right)+\cdots\,,
\end{aligned}$$

da cui si evince che il coefficiente "−1" della serie di Laurent e quindi il residuo nell'origine sono

$$\operatorname{Res}[F(z),0] = -1+\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Alla luce di questi risultati, l'integrale sulla circonferenza di raggio $n+1/2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}F(z)dz &= \frac{\pi}{\operatorname{senh}(\pi)}+\operatorname{Res}[F(z),0]+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\,(k^2+1)}+\sum_{k=-n}^{-1}\frac{(-1)^k}{k^2\,(k^2+1)}\\
&= \frac{\pi}{\operatorname{senh}(\pi)}-1+\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\,(k^2+1)}\,,
\end{aligned}$$

l'ultima identità segue dalla parità del termine della somma.
Dimostriamo che nel limite $n\to\infty$ e quindi al divergere del raggio della circonferenza che rappresenta il percorso d'integrazione, l'integrale tende a zero. A tal fine proviamo che si ha il limite uniforme

$$\lim_{n\to\infty} zF(z)\overset{\text{U.}}{=}0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}|zF(z)|\overset{\text{U.}}{=}0\,,$$

il modulo sulla circonferenza di raggio $r_n = n+1/2$ può essere minorato uniformemente come segue

$$|zF(z)| = \pi\frac{r_n}{|\operatorname{sen}(\pi z)|}\frac{1}{r_n^2\,|z+1|} \le \pi\frac{1}{|\operatorname{sen}(\pi z)|}\frac{1}{r_n\,(r_n-1)}\,,$$

dove si è usata la disuguaglianza triangolare nel limite $r_n\to\infty$, ovvero $r_n>1$,

$$|z+1| \le ||z|-1| = |r_n-1| \overset{r_n\ge 1}{=} = r_n-1.$$

Consideriamo il modulo quadro della funzione seno con variabile complessa, si ha

$$|\operatorname{sen}(\pi z)|^2 = |\operatorname{sen}(\pi(x+iy))|^2 = \operatorname{sen}^2(\pi x) + \operatorname{senh}^2(\pi y) \neq 0\,,$$

$\forall z$, tale che: $|z| = n + 1/2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, infatti affinché siano nulle sia la funzione seno che quella seno iperbolico è necessario che

$$(x,y) = (p,q)\,, \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \Rightarrow \qquad |z| = r_n = n + \frac{1}{2} = \sqrt{p^2+q^2} \qquad \Rightarrow \qquad n^2 + n + \frac{1}{4} = p^2 + q^2\,,$$

l'ultima identità è impossibile poiché, con $n \in \mathbb{N}$ e $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, il membro sinistro non è intero mentre è tale il membro destro. Per studiare i punti estremali della funzione $|\operatorname{sen}(\pi z)|^2$, con $|z| = r_n = n + 1/2$ e $n \in \mathbb{N}$, poniamo $z = r_n e^{i\theta}$ e consideriamo le funzioni periodiche nella variabile reale $\theta \in [0, 2\pi)$

$$g_n(\theta) = \operatorname{sen}^2(\pi r_n \cos(\theta)) + \operatorname{senh}^2(\pi r_n \operatorname{sen}(\theta))\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

I punti estremali sono gli zeri della derivata prima

$$\begin{aligned}\frac{d g_n(\theta)}{d\theta} &= 2\pi r_n \Big(-\operatorname{sen}(\pi r_n \cos(\theta)) \cos(\pi r_n \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{senh}(\pi r_n \operatorname{sen}(\theta)) \cosh(\pi r_n \operatorname{sen}(\theta)) \cos(\theta) \Big) \\ &= \pi r_n \Big(-\operatorname{sen}(2\pi r_n \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{senh}(2\pi r_n \operatorname{sen}(\theta)) \cos(\theta) \Big)\,,\end{aligned}$$

è immediato osservare che, avendo $r_n = n + 1/2$, i valori in si azzera la derivata sono: $\theta = 0, \pi$ e $\theta = \pi, 3\pi/2$. I valori della derivata seconda in questi punti sono

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g_n(\theta)}{d\theta^2} &= 2\pi^2 r_n^2 \Big(\cos(2\pi r_n \cos(\theta)) \operatorname{sen}^2(\theta) + \cosh(2\pi r_n \operatorname{sen}(\theta)) \cos^2(\theta) \Big) \\ &\quad - \pi r_n \Big(\operatorname{sen}(2\pi r_n \cos(\theta)) \cos(\theta) + \operatorname{senh}(2\pi r_n \operatorname{sen}(\theta)) \operatorname{sen}(\theta) \Big) \\ &= \begin{cases} 2\pi^2 r_n^2 \cosh(0) - \pi r_n \operatorname{sen}(\pi(2n+1)) = 2\pi^2 r_n^2 > 0 & \theta = 0, \pi \\ \pi r_n \left(2\pi r_n - \operatorname{senh}(2\pi r_n)\right) < 0 & \theta = \pi/2, 3\pi/2 \end{cases}\,,\end{aligned}$$

da cui si evince che nei punti $\theta = 0, \pi$ ci sono dei minimi, mentre nei punti $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ ci sono dei massimi. Per la periodicità in θ uno dei due minimi sarà assoluto e lo stesso per varrà per uno dei due massimi. I valori della funzione nei punti estremali sono

$$g_n(0) = g_n(\pi) = \operatorname{sen}^2(\pi r_n) = 1\,, \qquad g_n(\pi/2) = g_n(2\pi/2) = \operatorname{senh}^2(\pi r_n) > 1\,,$$

i minimi e i massimi sono entrambi assoluti. In particolare, poiché il valore di minimo non dipende da $n \in \mathbb{N}$, si ha che, $\forall\, z$, tale che $|z| = r_n$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(\theta) = |\operatorname{sen}(\pi z)|^2 \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{|\operatorname{sen}(\pi z)|} \leq 1\,.$$

Ne consegue che la disuguaglianza data nella terzultima espressione della pagina precedente, diventa

$$|zF(z)| \leq \pi \frac{1}{|\operatorname{sen}(\pi z)|} \frac{1}{r_n (r_n - 1)} \leq \pi \frac{1}{r_n (r_n - 1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\,,$$

che implica l'annullamento dell'integrale nello stesso limite, cioè

$$0 = \lim_{n \to \infty} \oint_{|z|=n+1/2} F(z) dz = \frac{\pi}{\operatorname{senh}(z)} - 1 + \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 (k^2+1)} = \frac{\pi}{\operatorname{senh}(z)} - 1 + \frac{\pi^2}{6} + 2\triangle.$$

Risolvendo questa equazione per la somma della serie cercata, si ottiene

$$\triangle = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}(\pi)} - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \sqrt{2\pi}\,\theta(x-a)x^n e^{-bx}\,,$$

con: $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $b \in (0, \infty)$, è

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{n!}{(b+ik)^{n+1}} e^{-a(b+ik)} \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j (b+ik)^j}{j!}\,.$$

Soluzione del quarto problema

L'integrale della trasformata di Fourier, considerando la funzione a gradino di Heaviside, ha la forma seguente

$$\mathscr{F}_k[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\,\theta(x-a)x^n e^{-bx} e^{-ikx} dx = \int_a^{\infty} x^n e^{-x(b+ik)} dx\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] &= \int_a^{\infty} x^n e^{-x(b+ik)} dx = \left.\frac{x^n e^{-x(b+ik)}}{-(b+ik)}\right|_a^{\infty} + \frac{n}{b+ik}\int_a^{\infty} x^{n-1} e^{-x(b+ik)} dx \\
&= \frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + \frac{n}{b+ik}\int_a^{\infty} x^{n-1} e^{-x(b+ik)} dx\,,
\end{aligned}$$

integrando di nuovo per parti

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] &= \frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + \frac{n}{b+ik}\left(\frac{a^{n-1} e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + \frac{n-1}{b+ik}\int_a^{\infty} x^{n-2} e^{-x(b+ik)} dx\right) \\
&= \frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + n\frac{a^{n-1} e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^2} + \frac{n(n-1)}{(b+ik)^2}\int_a^{\infty} x^{n-2} e^{-x(b+ik)} dx\,.
\end{aligned}$$

Dopo n integrazioni per parti si arriva all'espressine

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] = &\frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + n\frac{a^{n-1} e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^2} + n(n-1)\frac{a^{n-2} e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^3} + \cdots \\
&+ n(n-1)(n-2)\cdots 3\frac{a^2 e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^{n-1}} + n(n-1)(n-2)\cdots 2\frac{a e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^n} + \frac{n!}{(b+ik)^n}\int_a^{\infty} e^{-x(b+ik)} dx\,,
\end{aligned}$$

che, dopo il calcolò dell'ultimo integrale, da

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] = &\frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{b+ik} + n\frac{a^{n-1} e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^2} + n(n-1)\frac{a^{n-2} e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^3} + \cdots + \\
&+ n(n-1)(n-2)\cdots 3\frac{a^2 e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^{n-1}} + n(n-1)(n-2)\cdots 2\frac{a e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^n} + n!\frac{e^{-a(b+ik)}}{(b+ik)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Moltiplicando il primo termine della somma a secondo membro per l'unità nella forma $1 = n!/n!$, il secondo per $1 = (n-1)!/(n-1)!$, il terzo per $1 = (n-2)!/(n-2)!$, il j-esimo per $1 = (n-j+1)!/(n-j+1)!$, l'$(n-1)$-esimo per $1 = 2!/2!$ e banalmente l'n-esimo per $1 = 1!/1!$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] &= n!\frac{a^n e^{-a(b+ik)}}{n!(b+ik)} + n!\frac{a^{n-1} e^{-a(b+ik)}}{(n-1)!(b+ik)^2} + n!\frac{a^{n-2} e^{-a(b+ik)}}{(n-2)!(b+ik)^3} + \cdots + \\
&\quad + n!\frac{a^2 e^{-a(b+ik)}}{2!(b+ik)^{n-1}} + n!\frac{a e^{-a(b+ik)}}{1!(b+ik)^n} + n!\frac{e^{-a(b+ik)}}{0!(b+ik)^{n+1}}\,. \\
&= n! e^{-a(b+ik)} \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{j!(b+ik)^{n+1-j}}\,,
\end{aligned}$$

da cui si arriva all'espressione cercata

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{n!}{(b+ik)^{n+1}} e^{-a(b+ik)} \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j (b+ik)^j}{j!} \, .$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'operatore normale $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert a $n \in \mathbb{N}$ dimensioni H_n, siano $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^n$ e $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ gli insiemi degli autovettori e dei corrispondenti autovalori, cosicché si abbiamo le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle \, , \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\} \, .$$

Detta A la matrice $n \times n$ che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica, definiamo $\hat{A}^T$ come l'operatore che, rispetto alla stessa base, sia rappresentato dalla matrice trasposta A^T, ovvero: $\hat{A} \hookleftarrow A$ e $\hat{A}^T \hookleftarrow A^T$. Siano $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^n$ e $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ gli insiemi degli autovettori e dei corrispondenti autovalori dell'operatore $\hat{A}^T$ per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}^T |b_k\rangle = \beta_k |b_k\rangle \, , \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\} \, .$$

Che relazioni ci sono tra gli autovalori, ovvero tra gli elementi degli insiemi $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ e $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, e tra le rappresentazioni matriciali degli autovettori rispetto alla base canonica e cioè tra elementi degli insiemi $\{a_k\}_{k=1}^n$ e $\{b_k\}_{k=1}^n$, dove

$$|a_k\rangle \, , |b_k\rangle \hookleftarrow a_k \, , b_k \, , \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\} \, ?$$

Si ottengano le rappresentazioni degli autovettori e gli spettri discreti degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}^T$ definiti nello spazio di Hilbert a tre dimensioni H_3, sapendo che la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica è

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3-i & -4i & 1-3i \\ -4i & 2i & 4 \\ -1+3i & -4 & 3-i \end{pmatrix} .$$

Soluzione del quinto problema

L'operatore è diagonalizzabile e ammette un insieme di n autovettori ortonormali. La matrice diagonalizzante U, che verifica la relazione

$$U^\dagger A U = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \, ,$$

è unitaria e ha come elementi le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori, ovvero

$$U = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} ,$$

dove il a_j^k è la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j \in \{1, 2, 3\}$. La trasposizione della relazione di diagonalizzazione dà

$$\begin{aligned} \left(U^\dagger A U\right)^T &= \left(\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\right)^T \\ U^T A^T \left(U^\dagger\right)^T &= \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ U^T A^T U^* &= \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \, , \end{aligned}$$

dove si è usata la definizione: $U^\dagger = U^{*T}$. Posto $W = U^*$, la precedente diventa

$$W^{*T} A^T W = W^\dagger A^T W = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \, .$$

La matrice W, che è unitaria, infatti, avendo che $UU^\dagger = U^\dagger U = I$,

$$\begin{aligned} W^\dagger W = W^{*T} W = U^T U^* = \left(U^{*T} U\right)^T = \left(U^\dagger U\right)^T = (I)^T = I \, , \\ W W^\dagger = W W^{*T} = U^* U^T = \left(U U^{*T}\right)^T = \left(U U^\dagger\right)^T = (I)^T = I \, , \end{aligned}$$

diagonalizza A^T. Ne consegue che:

- gli autovalori β_k coincidono con gli α_k, cioè: $\beta_k = \alpha_k$, con $k = 1,2,3$;
- gli autovettori di $\hat{A}^T$ sono rappresentati dai vettori che hanno per componenti gli elementi delle colonne della matrice W, ovvero

$$W = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} = U^* = \begin{pmatrix} a_1^{1*} & a_2^{1*} & a_3^{1*} \\ a_1^{2*} & a_2^{2*} & a_3^{2*} \\ a_1^{3*} & a_2^{3*} & a_3^{3*} \end{pmatrix},$$

  si quindi che $b_j^k = a_j^{k*}$, $\forall\, k, j \in \{1,2,3\}$, dove b_j^k è la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore di A^T.

Nel caso particolare proposto dal problema, gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$, rappresentato dalla matrice A data, si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - I\alpha) &= 0 \\ \frac{1}{6^3}\det\begin{pmatrix} 3-i-6\alpha & -4i & 1-3i \\ -4i & 2i-6\alpha & 4 \\ -1+3i & -4 & 3-i-6\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 &= 0 \end{aligned}$$

si verifica facilmente che $\alpha = 1$ è soluzione, quindi

$$-(\alpha - 1)\left(\alpha^2 + 1\right) = 0,$$

gli autovalori sono

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_{2,3} = \pm i.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori corrispondenti, elementi dell'insieme $\{a_k\}_{k=1}^3$, si ottengono come soluzioni dei sitemi lineari omogenei

$$(A - I\alpha_k)a_k = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3-i-6\alpha_k & -4i & 1-3i \\ -4i & 2i-6\alpha_k & 4 \\ -1+3i & -4 & 3-i-6\alpha_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ a_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove a_k^j indica la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore. Posto $a_k^1 = a$, per ogni $k \in \{1,2,3\}$, dalla seconda si ha

$$a_k^3 = ia - \frac{i - 3\alpha_k}{2}a_k^2,$$

sostituendo nella prima si ottengono le seconde componenti

$$\begin{aligned} a\,(3 - i - 6\alpha_k) - 4ia_k^2 + (1-3i)ia - (1-3i)\frac{i-3\alpha_k}{2}a_k^2 &= 0 \\ 2a\,(1-\alpha_k) + \frac{-1-3i+\alpha_k(1-3i)}{2}a_k^2 &= 0 \\ a_k^2 = \frac{4a\,(1-\alpha_k)}{1+3i-\alpha_k(1-3i)} &= \begin{cases} 0 & k=1,\ \alpha_1 = 1 \\ -2a & k=2,\ \alpha_2 = i \\ a & k=3,\ \alpha_3 = -i \end{cases}, \end{aligned}$$

e le terze componenti sono

$$a_k^3 = ia - \frac{i-3\alpha_k}{2}a_k^2 = \begin{cases} ia & k=1,\ \alpha_1 = 1 \\ -ia & k=2,\ \alpha_2 = i \\ -ia & k=3,\ \alpha_3 = -i \end{cases}.$$

Le rappresentazioni dei tre autovettori normalizzati, con $a = 1$, sono

$$a_1 = \frac{1}{a\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ ia \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{a\sqrt{6}} \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -ia \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{a\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a \\ a \\ -ia \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}^T$, rappresentato dalla matrice A^T di quella data, si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det\left(A^T - I\beta\right) &= 0 \\ \det\left((A - I\beta)^T\right) &= 0 \\ -\beta^3 + \beta^2 - \beta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

grazie alla seconda equazione, che segue dalla simmetria della matrice identità, si ottiene la stessa equazione secolare dell'operatore $\hat{A}$ e quindi si hanno gli stessi autovalori

$$\beta = 1, \qquad \beta_{2,3} = \pm i.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori corrispondenti, elementi dell'insieme $\{b_k\}_{k=1}^3$, si ottengono, con la stessa procedura del caso precedente, ovvero come soluzioni dei sitemi lineari omogenei

$$\left(A^T - I\beta_k\right) b_k = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 - i - 6\beta_k & -4i & -1 + 3i \\ -4i & 2i - 6\beta_k & -4 \\ 1 - 3i & 4 & 3 - i - 6\beta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ b_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove b_k^j indica la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore. Poniamo $b_k^1 = b$, per ogni $k \in \{1, 2, 3\}$ e dalla seconda si ha

$$b_k^3 = -ib + \frac{i - 3\beta_k}{2} b_k^2,$$

sostituendo nella prima si ottengono le seconde componenti

$$\begin{aligned} b\,(3 - i - 6\beta_k) - 4i\,b_k^2 + (1 - 3i)ib - (1 - 3i)\frac{i - 3\beta_k}{2} b_k^2 &= 0 \\ 2b\,(1 - \beta_k) + \frac{-1 - 3i + \beta_k(1 - 3i)}{2} b_k^2 &= 0 \\ b_k^2 = \frac{4b\,(1 - \beta_k)}{1 + 3i - \beta_k(1 - 3i)} &= \begin{cases} 0 & k = 1,\ \beta_1 = 1 \\ -2b & k = 2,\ \beta_2 = i \\ b & k = 3,\ \beta_3 = -i \end{cases}, \end{aligned}$$

e le terze componenti sono

$$b_k^3 = -ib + \frac{i - 3\beta_k}{2} b_k^2 = \begin{cases} -ib & k = 1,\ \beta_1 = 1 \\ ib & k = 2,\ \beta_2 = i \\ ib & k = 3,\ \beta_3 = -i \end{cases}.$$

Le rappresentazioni dei tre autovettori normalizzati, con $b = 1$, sono

$$b_1 = \frac{1}{b\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -ib \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{b\sqrt{6}} \begin{pmatrix} b \\ -2b \\ ib \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ i \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{b\sqrt{3}} \begin{pmatrix} b \\ b \\ ib \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che, come dimostrato nel caso generale, i vettori che rappresentano gli autovettori dell'operatore $\hat{A}^T$, elementi dell'insieme $\{b_k\}_{k=1}^3$, sono i complessi coniugati di quelli, $\{a_k\}_{k=1}^3$, che rappresentano, rispetto alla stessa base canonica, gli autovettori dell'operatore $\hat{A}$, ovvero: $b_k = a_k^*$, $\forall\, k \in \{1, 2, 3\}$.

Sesto problema (punteggio massimo: 5/30)

Dopo aver dimostrato l'implicazione

$$\left|\det\left(\hat{S}\right)\right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Re}\left(\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right)\right) = 0\,,$$

per un generico operatore $\hat{S}$ invertibile definito nello spazio di Hilbert a $n \in \mathbb{N}$ dimensioni H_n, la si verifichi nel caso del secondo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_2$, rappresentato, rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_3$, dalla matrice

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del sesto Problema

Il determinante e la traccia di un operatore sono invarianti, ovvero, i loro valori sono indipendenti dalla rappresentazione e quindi dalla base dello spazio vettoriale che si usano per calcolarle. È quindi lecito, quando possibile, usare la rappresentazione diagonale, che permette il calcolo immediato sia del determinante che della traccia. Infatti, indicando con S_d la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{S}$, cioè

$$\hat{S} \hookleftarrow S_d = \operatorname{diag}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\,,$$

dove l'insieme $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ è lo spettro discreto dell'operatore, ovvero l'insieme degli autovalori, si hanno

$$\det\left(\hat{S}\right) = \det\left(S_d\right) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\,, \qquad \operatorname{Tr}\left(\hat{S}\right) = \operatorname{Tr}\left(S_d\right) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,.$$

Se l'operatore è invertibile il determinante è diverso da zero, il che implica l'assenza dell'autovalore nullo dallo spettro discreto. Lo spettro dell'operatore logaritmo $\ln\left(\hat{S}\right)$ è quindi definito e ha come elementi i logaritmi degli elementi dello spettro dell'operatore $\hat{S}$. La rappresentazione diagonale dell'operatore $\ln\left(\hat{S}\right)$ è

$$\ln\left(\hat{S}\right) \hookleftarrow \ln\left(S_d\right) = \operatorname{diag}\left(\ln\left(\alpha_1\right), \ln\left(\alpha_2\right), \ldots, \ln\left(\alpha_n\right)\right)\,,$$

che ha come traccia il logaritmo del determinante dell'operatore $\hat{S}$, infatti

$$\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\alpha_k\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) = \ln\left(\det\left(S_d\right)\right) = \ln\left(\det\left(\hat{S}\right)\right)\,.$$

Poiché il logaritmico di un numero complesso è a sua volta un numero complesso che ha per parte reale il logaritmo del modulo e parte immaginaria l'argomento, si ha

$$\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right) = \ln\left(\det\left(\hat{S}\right)\right) = \ln\left|\det\left(\hat{S}\right)\right| + i\arg\left(\det\left(\hat{S}\right)\right)\,,$$

ovvero

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right)\right) = \ln\left(\left|\det\left(\hat{S}\right)\right|\right)\,, \qquad \operatorname{Im}\left(\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right)\right) = \arg\left(\det\left(\hat{S}\right)\right)\,.$$

Ne consegue che, se $\left|\det\left(\hat{S}\right)\right| = 1$, la parte reale della traccia del logaritmo dell'operatore vale

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{Tr}\left(\ln\left(\hat{S}\right)\right)\right) = \ln\left(\left|\det\left(\hat{S}\right)\right|\right) = \ln(1) = 0\,.$$

Abbiamo così ottenuto la dimostrazione richiesta.
La seconda matrice di Pauli, così come la prima e la terza, ha lo spettro discreto $\{-1, 1\}$, da cui seguono: $\det\left(\hat{\sigma}_j\right) = -1$, $\left|\det\left(\hat{\sigma}_j\right)\right| = 1$ e $\operatorname{Tr}\left(\hat{\sigma}_j\right) = 0$, $\forall\, j \in \{1, 2, 3\}$. Le rappresentazioni diagonali degli operatori $\hat{\sigma}_2$ e $\ln\left(\hat{\sigma}_2\right)$ sono

$$\hat{\sigma}_2 \hookleftarrow \left(\sigma_2\right)_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \ln\left(\hat{\sigma}_2\right) \hookleftarrow \ln\left(\left(\sigma_2\right)\right)_d = \begin{pmatrix} \ln(1) & 0 \\ 0 & \ln(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}.$$

La traccia del secondo operatore è un immaginario puro, infatti,

$$\operatorname{Tr}\left(\left(\hat{\sigma}_2\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(\ln\left(\left(\sigma_2\right)\right)_d\right) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} = i\pi\,,$$

ne consegue che ha parte reale nulla, cioè

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{Tr}\left(\left(\hat{\sigma}_2\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(i\pi\right) = 0\,,$$

come volevasi dimostrare.