Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario invernale - 15 marzo 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathscr{W}_n = \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)} dz \, ,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ e dove $\Gamma(z)$ e la funzione gamma di Eulero.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici della funzione seno iperbolico e degli stessi poli semplici della funzione gamma di Eulero di argomento $z+1$. I primi sono i punti dell'insieme $\{z_k = ik\}_{k\in\mathbb{Z}}$ i secondi quelli dell'insieme $\left\{p_j = -j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$. Il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza centrata nell'origine di raggio semi-intero $n+1/2$, con $n \in \mathbb{N}$, avvolge i poli appartenenti all'insieme

$$\mathscr{P} = \{z_k = ik\}_{k=-n}^{n} \cup \left\{p_j = -j\right\}_{j=1}^{n} \, .$$

Usando il teorema dei residui

$$\mathscr{W}_n = 2i\pi \left(\sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}, ik\right] + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}, -j\right] \right) .$$

I residui negli zeri della funzione seno iperbolico sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}, ik\right] = \lim_{z\to ik} \frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}(z-ik) = \frac{(-1)^k \Gamma(1+ik)}{\pi} \, , \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} \, .$$

I residui nei poli della funzione gamma di Eulero sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}, -j\right] = \lim_{z\to -j} \frac{\Gamma(z+1)}{\operatorname{senh}(\pi z)}(z+j) = \frac{1}{-\operatorname{senh}(j\pi)} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{1}{\operatorname{senh}(j\pi)} \frac{(-1)^{j}}{(j-1)!} \, .$$

Sfruttando il principio di riflessione di Schwarz nella somma dei residui nei poli dell'insieme $\{z_k = ik\}_{k=-n}^{n}$, ovvero l'identità $\Gamma(1+ik) = \Gamma^*(1-ik)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_n &= 2i\pi \left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(1+ik)}{\pi} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{senh}(j\pi)} \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \right) \\ &= 2i\pi \left(\frac{1}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \operatorname{Re}\left(\Gamma(1+ik)\right)}{\pi} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{senh}(j\pi)} \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \right) , \end{aligned}$$

il risultato è

$$\mathcal{W}_n = 2i + 2i\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[2\,\mathrm{Re}\,(\Gamma(1+ik)) + \frac{1}{\mathrm{senh}(k\pi)(k-1)!}\right], \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

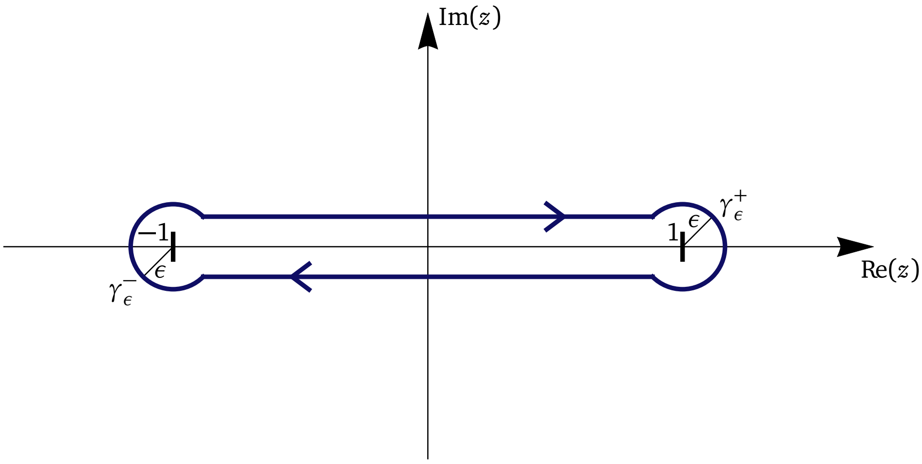
Definiamo il percorso ad "osso", mostrato in figura,

$$\Gamma_\epsilon = [-1+\epsilon+i\epsilon, 1-\epsilon+i\epsilon]\cup\left(-\gamma_\epsilon^+\right)\cup[1-\epsilon-i\epsilon,-1+\epsilon-i\epsilon]\cup\left(-\gamma_\epsilon^-\right),$$

con gli archi infinitesimi

$$\gamma_\epsilon^+ = \left\{z : z = 1+\epsilon e^{i\theta}, \theta\in[-3\pi/4+\eta, 3\pi/4]\right\}, \qquad \gamma_\epsilon^- = \left\{z : z = -1+\epsilon e^{i\theta}, \theta\in[\pi/4, 7\pi/4]\right\}$$

e calcoliamo l'integrale su tale percorso della stessa funzione integranda del problema con il metodo dei residui.



La funzione integranda è polidroma e ha due poli semplici in $z_\pm = \pm i$, quindi, anche nel limite $\epsilon\to 0^+$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\Gamma_\epsilon}\frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, -i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, i\right]\right).$$

Il residuo all'infinito non è stato incluso in quanto nullo, come conseguenza della regolarità asintotica della funzione integranda. Infatti, per ogni successione che si accumuli all'infinito non intersecando l'insieme dei poli e il taglio, ovvero: $\forall\,\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, tale che, ad esempio,

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \infty\,, \qquad \text{con: } |p_k| > 1\,,\ \ \forall k\in\mathbb{N}\,,$$

si ha

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = 0\,.$$

Inoltre, definendo la fasi dei binomi il cui prodotto rappresenta l'argomento della radice quadrata in modo tale che la discontinuità coincida con il segmento reale $[-1,1]$, cioè

$$1-z^2 = (1-z)(1+z) = |1-z|e^{i\theta_1}|1+z|e^{i\theta_2}\,, \qquad \theta_1\in(-\pi,\pi)\,, \quad \theta_2\in(0,2\pi)\,,$$

si hanno: $(\theta_1, \theta_2) = (0^-, 0^+)$ e $(\theta_1, \theta_2) = (0^+, 2\pi^-)$ rispettivamente sui tratti rettilinei di Γ_ϵ che si trovano sopra e sotto l'asse reale, i segni ad esponente indicano la direzione di tendenza. Ne consegue che il limite dell'integrale sul percorso chiuso Γ_ϵ può essere scritto come

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = & -\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}\right) \\
& + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i(0^-+0^+)/2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx - \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i(0^++2\pi^-)/2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx \\
= & -\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}\right) + 2\text{ꝏ}\,.
\end{aligned}$$

I limiti degli integrali sugli archi $\gamma_\epsilon^\pm$ sono nulli, infatti

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left|\frac{z\mp 1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}\right| = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{|1\mp z|^{1/2}}{|1+z^2|\,|1\pm z|^{1/2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon^{1/2}}{\left|1+\left(1\mp\epsilon e^{i\theta}\right)^2\right|\left|2\mp\epsilon e^{i\theta}\right|^{1/2}} = 0\,.$$

Dalle espressioni in termini della somma dei residui e dei contributi sui tratti rettilinei si ha

$$\text{ꝏ} = i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, -i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, i\right]\right).$$

Calcoliamo i residui dei poli semplici, in $z=-i$ si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, -i\right] &= \lim_{z\to -i}\frac{z+i}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\bigg|_{-i} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{(1-(-i))(1+(-i))}} \\
&= -\frac{1}{2i}\frac{e^{-i(\theta_1^-+\theta_2^-)/2}}{\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}}\,,
\end{aligned}$$

le due radici di 2 a denominatore sono i moduli di $(1-(-i))$ e $(1+(-i))$, θ_1^- e θ_2^- le fasi, che appartengono rispettivamente al primo e al quarto quadrante,

$$\theta_1^- = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \in (-\pi, \pi)\,, \qquad \theta_2^- = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) \in (0, 2\pi)\,.$$

Le scelte, fatte coerentemente con le determinazioni, sono

$$\theta_1^- = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \theta_2^- = \frac{7\pi}{4}\,,$$

il residuo vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, -i\right] = \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i(\pi/4+7\pi/4)/2} = \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i\pi} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\,.$$

Per il residui in $z=i$ si ha

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, i\right] = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\bigg|_{i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{(1-i)(1+i)}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i(\theta_1^++\theta_2^+)/2}\,,$$

in questo caso, le fasi appartengono rispettivamente al quarto e al primo quadrante,

$$\theta_1^+ = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi)\,, \qquad \theta_2^+ = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \in (0, 2\pi)\,,$$

si ha lo stesso valore del precedente, cioè

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}, i\right] = -\frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i(-\pi/4+\pi/4)/2} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\,.$$

In definitiva,

$$\text{ꝏ} = i\pi\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si ottenga l'espansione di Weierstrass della funzione

$$W(z) = \Gamma(z)\left(e^{2i\pi z} - 1\right).$$

Utilità. Potrebbe essere di aiuto il valore della derivata prima della funzione gamma di Eulero in $z = -1$, ovvero: $\Gamma'(1) = -\gamma$, dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Soluzione del terzo problema

È immediato constatare che l'espansione di Weierstrass del prodotto di due funzioni è il prodotto delle espansioni e che, in conseguenza della stessa natura di prodotto infinito dell'espansone, questa proprietà possa essere estesa anche al quoziente. L'espansione di Weierstrass dell'inverso della funzione gamma di Eulero è

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{z\gamma} \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}\,,$$

dove $\gamma \simeq 0.577216$ è la costante di Euler-Mascheroni. La funzione che, moltiplicata per $\Gamma(z)$ dà la funzione data $W(z)$ è

$$f(z) \equiv \frac{W(z)}{\Gamma(z)} = e^{2i\pi z} - 1\,,$$

è intera, ha zeri semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Sono zeri semplici poiché in essi si annulla solo la funzione, la derivata prima vale

$$f'(z_k) = 2i\pi\, e^{2i\pi z_k} = 2i\pi \neq 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poiché anche l'origine è uno zero e gli zeri sono semplici, ovvero hanno molteplicità unitaria, per l'espansione di Weierstrass usiamo la formula

$$f(z) = z f'(0) e^{z f''(0)/(2f'(0))} \prod_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}\,.$$

I valori delle derivate prima e seconda nell'origine sono

$$f'(0) = 2i\pi\,, \qquad f''(z)\big|_0 = -4\pi^2 e^{2i\pi z}\big|_0 = -4\pi^2\,,$$

ne consegue

$$f(z) = 2i\pi z e^{i\pi z} \prod_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} = 2i\pi z e^{i\pi z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k}\right)\left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Usando

$$\Gamma(z) = z^{-1} e^{-z\gamma} \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{j}\right)^{-1} e^{z/j}\,,$$

per la funzione gamma di Eulero, l'espansione completa è

$$W(z) = \Gamma(z) f(z) = \left[z^{-1} e^{-z\gamma} \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{j}\right)^{-1} e^{z/j}\right] 2i\pi z e^{i\pi z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k}\right)\left(1 + \frac{z}{k}\right),$$

che, con le opportune esemplificazioni diventa

$$W(z) = 2i\pi\, e^{-z(\gamma - i\pi)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

Dopo averlo classificato, si ottengano lo spettro discreto, l'insieme degli autovettori e la norma dell'operatore

$$\hat{H} = \sum_{j,k,m=1}^{3} \epsilon_{jkm} |e_k\rangle\langle e_m| \, ,$$

definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, dove ϵ_{jkm}, con $j,k,m \in \{1,2,3\}$, è il simbolo di Levi-Civita e i vettori dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3} \subset E_3$ sono una base ortonormale dello spazio di Hilbert.

Soluzione del quarto problema

La matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base data ha elementi

$$H^h_l = \langle e_h|\hat{H}|e_l\rangle = \sum_{j,k,m=1}^{3} \epsilon_{jkm} \langle e_h|e_k\rangle\langle e_m|e_l\rangle = \sum_{j,k,m=1}^{3} \epsilon_{jkm} \delta^h_k \delta^m_l = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{jhl} \, , \qquad \forall\, h,l \in \{1,2,3\} \, ,$$

quindi la matrice

$$\hat{H} \overset{e}{\longleftrightarrow} H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

è anti-simmetrica e ha elementi reali. Ne consegue che l'operatore è anti-hermitiano, cioè

$$\hat{H}^\dagger = -\hat{H} \, ,$$

come tale, commuta con il suo aggiunto ed è quindi anche normale.
Lo spettro discreto è l'insieme delle soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(H - \eta I) &= 0 \qquad (1) \\ \det\begin{pmatrix} -\eta & 1 & -1 \\ -1 & -\eta & 1 \\ 1 & -1 & -\eta \end{pmatrix} &= 0 \\ -\eta\left(\eta^2+1\right) - (\eta - 1) - (1+\eta) &= 0 \\ -\eta\left(\eta^2+3\right) &= 0 \, , \end{aligned}$$

da cui si hanno i tre autovalori

$$\eta_0 = 0 \, , \qquad \eta_\pm = \pm i\sqrt{3} \, ,$$

lo spettro discreto è l'insieme $\sigma_H = \left\{0, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\right\}$. Gli autovettori hanno rappresentazioni rispetto alla base data

$$|v_k\rangle \overset{e}{\longleftrightarrow} v_k = \begin{pmatrix} v^1_k \\ v^2_k \\ v^3_k \end{pmatrix} , \qquad k = 0, -, + \, .$$

Ponendo $v^1_k = v$, con $k = 0, -, +$, si hanno le seconde e terze componenti

$$v^2_k = v\frac{1-\eta_k}{1+\eta_k^2} \, , \qquad v^3_k = v\frac{1+\eta_k}{1+\eta_k^2} \, ,$$

quindi, normalizzando i vettori all'unità, si hanno

$$v_0 = v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad v_\pm = v\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\pm 2i\pi/3} \\ e^{\mp 2i\pi/3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\pm 2i\pi/3} \\ e^{\mp 2i\pi/3} \end{pmatrix} .$$

Infine, la norma dell'operatore, essendo lo stesso normale, coincide con il massimo dei moduli degli autovalori, cioè

$$\left\|\hat{H}\right\| = \max_{k=0,-,+} \{|\eta_k|\} = \sqrt{3}\,.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\text{ШШ}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{(x-1)^{10}}\,.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Usando il teorema della convoluzione

$$\mathscr{F}_k[\,\text{ШШ}\,] = \mathscr{F}_k\left[\operatorname{sen}(x)\frac{1}{(x-1)^{10}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k[\operatorname{sen}(x)] * \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x-1)^{10}}\right].$$

La trasformata di Fourier della funzione seno è una combinazione di distruzioni delta di Dirac, ovvero

$$\mathscr{F}_k[\operatorname{sen}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sen}(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)} - e^{-ix(k+1)}\right)dx = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\delta(k+1) - \delta(k-1)\big).$$

La trasformata di Fourier della seconda funzione può essere ottenuta com trasformata di Fourier di una derivata, si ha

$$\frac{1}{(x-1)^{10}} = -\frac{1}{9!}\frac{d^9}{dx^9}\frac{1}{x-1}\,,$$

ne consegue

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x-1)^{10}}\right] = -\frac{1}{9!}\mathscr{F}_k\left[\frac{d^9}{dx^9}\frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{9!}(ik)^9\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right] = -\frac{ik^9}{9!}\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right].$$

La trasformata di Fourier del polo semplice in $x = 1$ si ottiene con l'integrazione in valore principale

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-1}dx\,,$$

che calcoliamo con la formula di Sokhotski-Plemelj e il lemma di Jordan

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-1}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-1+i\epsilon}dx + i\pi e^{-ik}\right)\\
&= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{ll} -2e^{-ik} + e^{-ik} = -e^{-ik} & k>0 \\ -0 + e^{-ik} = e^{-ik} & k<0 \end{array}\right\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Segno}[k]\,e^{-ik}\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x-1)^{10}}\right] = -\frac{ik^9}{9!}\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right] = -\frac{k^9}{9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Segno}[k]\,e^{-ik}\,.$$

La convoluzione che dà il risultato finale è

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[\,\text{ШШ}\,] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k[\operatorname{sen}(x)] * \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x-1)^{10}}\right]\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{k^9}{9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\delta(k-k'+1) - \delta(k-k'-1)\big)\mathrm{Segno}[k']e^{-ik'}dk'\\
&= -\frac{i}{2\cdot 9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\delta(k-k'+1) - \delta(k-k'-1)\big)\mathrm{Segno}[k']k'^9e^{-ik'}dk'\\
&= -\frac{i}{2\cdot 9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Segno}[k+1](k+1)^9e^{-i(k+1)} - \mathrm{Segno}[k-1](k-1)^9e^{-i(k-1)}\right)\\
&= -\frac{i}{2\cdot 9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(|k+1|^9e^{-i(k+1)} - |k-1|^9e^{-i(k-1)}\right),
\end{aligned}$$

riordinando, la trasformata di Fourier richiesta vale

$$\mathscr{F}_k\left[\text{Ш}\right] = \frac{i}{2\cdot 9!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(|k-1|^9 e^{-i(k-1)} - |k+1|^9 e^{-i(k+1)}\right).$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Nello spazio di Hilbert a tre dimensioni H_3 è definito l'operatore

$$\hat{\Delta} = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|,$$

in termini dei vettori $|a\rangle, |b\rangle \in H_3$ tali che: $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$ e

$$\|a\| = \frac{1}{2}, \qquad \|b\| = \frac{1}{3}.$$

Si ottengano lo spettro discreto e gli autovettori dell'operatore

$$\hat{\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\Delta}^k.$$

Soluzione del sesto Problema

Studiamo le potenze intere dell'operatore, per il quadrato si ha

$$\hat{\Delta}^2 = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) = |a\rangle\langle a|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|b\rangle\langle b| = \|a\|^2\,|a\rangle\langle a| + \|b\|^2\,|b\rangle\langle b|.$$

Il cubo

$$\hat{\Delta}^3 = \left(\|a\|^2\,|a\rangle\langle a| + \|b\|^2\,|b\rangle\langle b|\right)(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) = \|a\|^4\,|a\rangle\langle a| + \|b\|^4\,|b\rangle\langle b|,$$

quindi, per una generica potenza n con $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{\Delta}^n = \|a\|^{2(n-1)}\,|a\rangle\langle a| + \|b\|^{2(n-1)}\,|b\rangle\langle b|,$$

usando i valori dati per le norme

$$\hat{\Delta}^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}|a\rangle\langle a| + \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)}|b\rangle\langle b|.$$

La serie che definisce l'operatore $\hat{\Omega}$ può essere calcolata e si ha

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} &= \sum_{k=0}^{\infty}\hat{\Delta}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{\Delta}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2(k-1)}|a\rangle\langle a| + \left(\frac{1}{3}\right)^{2(k-1)}|b\rangle\langle b|\right) = \{j = k-1\}\\ &= \hat{I} + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2j}|a\rangle\langle a| + \left(\frac{1}{3}\right)^{2j}|b\rangle\langle b|\right) = \hat{I} + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{j}|a\rangle\langle a| + \left(\frac{1}{9}\right)^{j}|b\rangle\langle b|\right),\end{aligned}$$

sommando le due serie geologiche di ragioni $1/4$ e $1/9$ si ottiene per l'operatore $\hat{\Omega}$ l'espressione

$$\hat{\Omega} = \hat{I} + \frac{4}{3}|a\rangle\langle a| + \frac{9}{8}|b\rangle\langle b|.$$

È immediato dedurne gli autovettori, due dei quali sono gli stessi ka e kb, il terzo è il vettore ad essi ortogonale, che, a meno di un fattore scalare moltiplicative è unico, poiché i vettori ka e kb sono ortogonali e lo spazio vettoriale ha tre dimensioni. Indichiamo con $|c\rangle \in H_3$ il vettore tale che: $\langle a|c\rangle = \langle c|a\rangle = \langle b|c\rangle = \langle c|b\rangle = 0$. Si hanno allora le equazioni agli autovalori

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}|a\rangle &= \left(\hat{I} + \frac{4}{3}|a\rangle\langle a| + \frac{9}{8}|b\rangle\langle b|\right)|a\rangle = |a\rangle + \frac{4}{3}\|a\|^2\,|a\rangle = \left(1 + \frac{4}{3}\frac{1}{4}\right)|a\rangle = \frac{4}{3}|a\rangle,\\ \hat{\Omega}|b\rangle &= \left(\hat{I} + \frac{4}{3}|a\rangle\langle a| + \frac{9}{8}|b\rangle\langle b|\right)|b\rangle = |b\rangle + \frac{9}{8}\|b\|^2\,|b\rangle = \left(1 + \frac{9}{8}\frac{1}{9}\right)|b\rangle = \frac{9}{8}|b\rangle,\\ \hat{\Omega}|c\rangle &= \left(\hat{I} + \frac{4}{3}|a\rangle\langle a| + \frac{9}{8}|b\rangle\langle b|\right)|c\rangle = |c\rangle.\end{aligned}$$

In definitiva, lo spettro discreto è l'insieme $\sigma_{\hat{\Omega}} = \{4/3, 9/8, 1\}$ e gli autovettori corrispondenti sono i tre vettori ortogonali $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$.