# Metodi Matematici per la Fisica

## Secondo esonero - 15 giugno 2016

Si svolgano cortesemente i seguenti Problemi.

## Primo problema (punteggio: 3/30)

Dati due operatori hermitiani $\hat{A}$ and $\hat{B}$ in uno spazio di Hilbert $E_N$ a $N$ dimensioni, si ha che $\hat{P} = \hat{A}\hat{B}$ ha autovettori ortonormali $\{|p_k\rangle\}_{k=1}^N$ e autovalori $\{\pi_k\}_{k=1}^N$, ovvero

$$\hat{P}|p_k\rangle = \pi_k |p_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,\ldots,N\,.$$

Si dimostri che il commutatore $\hat{C} = [\hat{A},\hat{B}]$ ha gli stessi autovettori di $\hat{P}$ e autovalori $\{2i\mathrm{Im}(\pi_k)\}_{k=1}^N$.
Si ottengano gli autovalori $\{\pi_k\}_{k=1}^4$ e, in forma matriciale, gli autovettori corrispondenti nel caso in cui gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ siano rappresentati dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_1 \end{pmatrix},$$

dove $\sigma_1$ e $\sigma_2$ sono la prima e seconda matrice di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

### Soluzione del primo esercizio

La relazione tra $\hat{P} = \hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$ si ottiene partendo dal prodotto scalare

$$\langle p_k|\hat{P}|p_m\rangle = \langle p_k|\hat{A}\hat{B}|p_m\rangle = \delta_m^k \pi_m\,,$$

ne facciamo la coniugazione complessa

$$\left(\langle p_k|\hat{P}|p_m\rangle\right)^* = \left(\langle p_k|\hat{A}\hat{B}|p_m\rangle\right)^* = \langle p_m|\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger|p_k\rangle = \langle p_m|\hat{B}\hat{A}|p_k\rangle = \delta_m^k \pi_m^*\,,$$

ovvero, rispetto alla base di autovettori di $\hat{P}$ anche $\hat{B}\hat{A}$ è diagonale, quindi i due operatori hanno gli stessi autovettori e autovalori gli uni, complessi coniugati degli altri, quindi $\hat{B}\hat{A} = \hat{P}^\dagger$. Il commutatore è la differenza $\hat{P} - \hat{P}^\dagger$, quindi ha autovalori

$$\pi_k - \pi_k^* = 2i\mathrm{Im}(\pi_k)\,, \qquad k = 1,2,\ldots,N\,.$$

Nel caso particolare la matrice $P$ è

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -2i\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix},$$

gli autovalori sono $\pi_{1,2} = \pm i$ e $\pi_{3,4} = \mp 2i$ e gli autovettori, essendo la matrice diagonale, sono i vettori della base canonica

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il commutatore è

$$C=[A,B]=\begin{pmatrix}[\sigma_1,\sigma_2] & 0\\ 0 & 2[\sigma_2,\sigma_1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i\sigma_3 & 0\\ 0 & -4i\sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4i\end{pmatrix},$$

ed è anch'esso una matrice diagonale, i cui autovalori verificano la condizione richiesta, infatti

$$\begin{aligned}2i &= 2i\mathrm{Im}(\pi_1)=2i\mathrm{Im}(i),\\ -2i &= 2i\mathrm{Im}(\pi_2)=2i\mathrm{Im}(-i),\\ -4i &= 2i\mathrm{Im}(\pi_3)=2i\mathrm{Im}(-2i),\\ 4i &= 2i\mathrm{Im}(\pi_4)=2i\mathrm{Im}(2i).\end{aligned}$$

## Secondo problema (punteggio 3/30)

Facendo uso dell'equazione di Parseval per le trasformate di Fourier, si verifichi l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^4}dx=\frac{\pi}{8\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}k^2e^{-2|k|\alpha}dk,$$

con $\alpha>0$.

### Soluzione del secondo problema

L'equazione di Parseval per funzioni $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ è

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde f(k)|^2dk,$$

dove $\tilde f(k)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$. Per verificare l'identità proposta basta dimostrare che la trasformata di Fourier di

$$f(x)=\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}$$

è, a meno di una fase, la funzione

$$\tilde f(k)=\frac{\sqrt{\pi/2}}{2\alpha}ke^{-|k|\alpha}.$$

A tal fine, osserviamo che la $f(x)$ può essere scritta come la derivata

$$f(x)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+\alpha^2}=\frac{d}{dx}g(x),$$

della funzione

$$g(x)=-\frac{1}{2(x^2+\alpha^2)}.$$

Ne consegue che la sua trasformata di Fourier è esprimibile in termini di quella della funzione $g(x)$ come

$$\tilde f(k)=\mathscr{F}_k\left[\frac{dg}{dx}\right]=ik\mathscr{F}_k\left[g(x)\right]=ik\tilde g(k).$$

La funzione $g(x)$ ha una trasformata di Fourier "notevole", ovvero l'esponenziale del modulo, si ha infatti

$$\tilde{g}(k) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+\alpha^2} dx = -\frac{2i\pi}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \theta(-k) \frac{e^{-k\alpha}}{2i\alpha} - \theta(k) \frac{e^{k\alpha}}{-2i\alpha} \right] = -\frac{\sqrt{\pi/2}}{2\alpha} e^{-|k|\alpha} .$$

In definitiva per la funzione $f(x)$ otteniamo

$$\tilde{f}(k) = ik\tilde{g}(k) = -i\frac{\sqrt{\pi/2}}{2\alpha} ke^{-|k|\alpha} ,$$

che rappresenta il risultato cercato.

## Terzo problema (punteggio 2.5/30)

La successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E_N$, con $E_N$ spazio di Hilbert a $N$ dimensioni, è definita dalla legge ricorsiva

$$|a_1\rangle = |a\rangle , \qquad |a_{k+1}\rangle = |a_k\rangle + \frac{|a\rangle}{k} , \qquad k \in \mathbb{N} ,$$

dove il vettore $|a\rangle$ è un generico vettore con $\|a\| = 1$. Si dimostri che, nonostante si abbia il limite

$$\lim_{k\to\infty} \left\| a_{k+1} - a_k \right\| = 0 ,$$

$\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ non è una successione di Cauchy.

### Soluzione del terzo problema

Per verificare che non si tratta di una successione di Cauchy è sufficiente trovare una sotto-successione con indice crescente $p_k$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \left\| a_{p_{k+1}} - a_{p_k} \right\| > 0 .$$

Si consideri ad esempio la sotto-successione definita dagli indici $p_k = 2^k$, ovvero $\{|a_{p_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset \{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Dalla definizione si ha

$$|a_{m+n}\rangle = |a_{m+n-1}\rangle + \frac{|a\rangle}{m+n-1} = |a_m\rangle + \underbrace{\frac{|a\rangle}{m} + \frac{|a\rangle}{m+1} + \ldots + \frac{|a\rangle}{m+n-1}}_{n \text{ termini}} ,$$

ne consegue che

$$\left\| a_{m+n} - a_m \right\| = \left\| \frac{|a\rangle}{m} + \frac{|a\rangle}{m+1} + \ldots + \frac{|a\rangle}{m+n-1} \right\| = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m+n-1} \geq \frac{n}{m+n-1} . \qquad (1)$$

La norma della differenza tra due vettori successivi della sotto-successione è

$$\left\| a_{p_{k+1}} - a_{p_k} \right\| = \left\| a_{2^{k+1}} - a_{2^k} \right\| = \left\| a_{2^k+2^k} - a_{2^k} \right\| ,$$

applicando il risultato dell'eq. (1), con $m = n = 2^k$,

$$\left\| a_{p_{k+1}} - a_{p_k} \right\| = \left\| \frac{|a\rangle}{2^k} + \frac{|a\rangle}{2^k+1} + \ldots + \frac{|a\rangle}{2^{k+1}-1} \right\| \geq \frac{2^k}{2^{k+1}-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2} ,$$

si ottiene che nel limite richiesto la sotto-successione non converge a zero e quindi la successione non è una una successione di Cauchy.
In alternativa, è sufficiente osservare che l'affermazione:
$\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, m_\epsilon \in \mathbb{N}$, tale che,

$$\left\| a_i - a_j \right\| < \epsilon\,, \qquad\quad \forall\, i, j \geq m_\epsilon\,,$$

non è vera. Infatti, scelti $i = m_\epsilon + n$ e $j = m_\epsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, avremo, usando il risultato dell'eq. (1), una contraddizione

$$\epsilon > \left\| a_{m_\epsilon + n} - a_{m_\epsilon} \right\| \geq \frac{n}{m_\epsilon + n - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

## Quarto problema (punteggio 2.5/30)

Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & -3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/8 & -3/8 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}$$

è una contrazione e se ne determini il punto fisso.

### Soluzione del quarto esercizio

Essendo hermitiana, la matrice ha un insieme di autovettori ortonormali. Gli autovalori si ottengono come soluzione dell'equazione secolare, in $x$,

$$\begin{aligned}
0 &= \det \begin{pmatrix} 3/8 - x & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & -3/8 - x & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/8 & -3/8 - x & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 3/8 - x \end{pmatrix} \\
0 &= \left(\frac{3}{8} - x\right)\left[\left(\frac{3}{8} + x\right)^2 \left(\frac{3}{8} - x\right) - \frac{1}{8^2}\left(\frac{3}{8} - x\right)\right] - \frac{1}{8}\left[\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8^3}\right] \\
0 &= (3 - 8x)^2 \left[(3 + 8x)^2 - 1\right] - \left[(8x + 3)^2 - 1\right] \\
0 &= \left[(3 - 8x)^2 - 1\right]\left[(3 + 8x)^2 - 1\right]\,,
\end{aligned}$$

e sono

$$x_{1,2} = \frac{\pm 1 + 3}{8}\,, \qquad\quad x_{3,4} = \frac{\pm 1 - 3}{8}\,,$$

che riordiniamo come segue

$$x_{1,4} = \pm\frac{1}{2}\,, \qquad\quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{4}\,.$$

Un generico vettore $a$, diverso dal vettore nullo, può essere scritto come combinazione degli autovettori, che, come detto, rappresentano una base ortonormale, si ha quindi

$$a = a^k u_k\,,$$

dove $u_k$ è l'autovettore relativo all'autovalore $x_k$. La norma al quadrato del vettore che si ottiene moltiplicando la matrice $A$ per il vettore $a$ è

$$\|Aa\|^2 = \left\| a^k x_k u_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{4} |a^k x_k|^2 < \sum_{k=1}^{4} |a^k|^2 = \|a\|^2\,,$$

per ottenere l'ultima disuguaglianza si è usato il fatto che gli autovalori hanno tutti modulo strettamente minore di uno. Ne consegue che $A$ è una contrazione.
Poiché lo spettro di $A$ non contiene l'unità, l'unico punto fisso è il vettore nullo, ovvero

$$A0 = 0\,.$$

## Quinto problema (punteggio 3/30)

Una volta determinata la matrice

$$B = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} f(z)(Iz - A)^{-1}dz\,, \tag{2}$$

sapendo che

$$f(z) = z^2 + \frac{3}{4}\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 5i/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -5i/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si calcolino autovalori e autovettori di $B$.

### Soluzione del quinto problema

Gli autovalori della matrice hermitiana $A$ sono le soluzione dell'equazione secolare

$$\det(A - I\alpha) = \det\begin{pmatrix} 3/4-\alpha & 0 & 5i/4 \\ 0 & 1/2-\alpha & 0 \\ -5i/4 & 0 & 3/4-\alpha \end{pmatrix} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{3}{4}-\alpha\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 0$$

ovvero

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\,, \qquad \alpha_3 = 2\,.$$

Gli autovettori corrispondenti si ottengono come soluzioni dei tre sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 5i/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -5i/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,,$$

e sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix},$$

Per il teorema spettrale si ha che la rappresentazione diagonale di $B$ è

$$\begin{aligned} B_d &= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2+3/4}{z-\alpha_1}dz, \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2+3/4}{z-\alpha_2}dz, \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2+3/4}{z-\alpha_3}dz\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2+3/4}{z-\alpha_1}dz, \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^2+3/4}{z-\alpha_2}dz, 0\right) \\ &= \mathrm{diag}\,(1,1,0)\,. \end{aligned}$$

Nella terza posizione della diagonale si ottiene uno zero in quanto il polo $\alpha_3$ dell'integranda non è all'interno della circonferenza unitaria, quindi, per il teorema di Cauchy, l'integrale è nullo.
Usando la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

che si ottiene allineando le componenti degli autovettori lungo le tre colonne, si ha la rappresentazione cercata per la matrice $B$, ovvero

$$B = UB_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

## Sesto problema (punteggio 3/30)

Sfruttando il metodo delle trasformate di Fourier si risolva l'equazione differenziale

$$u'(x) + (x+1)u(x) = 0,$$

con la condizione $u(0) = 1$.

### Soluzione del sesto problema

Applicando l'operatore trasformata di Fourier abbiamo

$$\mathscr{F}_k\left[u'(x) + (x+1)u(x)\right] = \mathscr{F}_k\left[u'(x)\right] + \mathscr{F}_k\left[xu(x)\right] + \mathscr{F}_k\left[u(x)\right] = ik\tilde{u}(k) + \mathscr{F}_k\left[xu(x)\right] + \tilde{u}(k) = 0.$$

dove con $\tilde{u}(k) = \mathscr{F}_k\left[u(x)\right]$.
La trasformata di Fourier di $xu(x)$ si ottiene, ad esempio, partendo dalla trasformata di Fourier della derivata, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[f'(x)\right] = ik\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] = ik\tilde{f}(k),$$

infatti, l'anti-trasformata rappresenta la "trasformata" di una funzione per la variabile, anche se in questo caso è $k$, cioè

$$\mathscr{F}_{-x}\left[k\tilde{f}(k)\right] = -if'(x).$$

Tenendo conto del cambiamento di segno dovuto allo scambio di $k$ con $x$, avremo

$$\mathscr{F}_k\left[xu(x)\right] = i\tilde{u}'(k).$$

Usando questo risultato l'equazione per $\tilde{u}(k)$ diventa

$$ik\tilde{u}(k) + i\tilde{u}'(k) + \tilde{u}(k) = 0,$$

da cui

$$\tilde{u}'(k) = (i-k)\tilde{u}(k).$$

Integriamo, in $dk'$, tra $k' = 0$ e $k' = k$, e in $d\tilde{u}$ tra $\tilde{u} = \tilde{u}(0)$ e $\tilde{u} = \tilde{u}(k)$, si ha quindi

$$\tilde{u}(k) = \tilde{u}(0)e^{ik-k^2/2}.$$

Per ottenere la soluzione $u(x)$ facciamo l'anti-trasformata

$$u(x) = \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(1+x)} e^{-k^2/2} dk = \tilde{u}(0) \frac{e^{-(x+1)^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k/\sqrt{2} - i(x+1)/\sqrt{2}\right)^2} \frac{dk}{\sqrt{2}} = \tilde{u}(0) e^{-(x+1)^2/2} .$$

Usiamo, infine, la condizione al contorno, $u(0) = 1$, per determinare il valore della costante $\tilde{u}(0)$,

$$u(0) = \tilde{u}(0) e^{-1/2} = 1 , \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{u}(0) = e^{1/2} .$$

La soluzione completa è

$$u(x) = e^{-x(x/2+1)} .$$