

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PRIMO APPELLO INVERNALE 15 GENNAIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri l'identità

$$\cot(z\pi) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1} \left(z - \frac{1}{2}\right)^j,$$

per ogni z , tale che: $|z - 1/2| < 1/2$.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione cotangente $\cot(z\pi)$ è una funzione meromorfa che ha zeri semplici e poli semplici rispettivamente nei punti degli insiemi $\{z_k = k + 1/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{p_j = j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, coincidenti con gli zeri semplici delle funzioni coseno e seno, che ne rappresentano il numeratore e il denominatore. Il punto $z_0 = 1/2$ è uno zero semplice, si ha lo sviluppo in serie di Taylor

$$\cot(z\pi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \cot(z\pi) \Big|_{z=1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \cot(z\pi) \Big|_{z=1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \left(z - \frac{1}{2}\right)^j,$$

si noti che il termine costante della serie, il termine zero, è nullo, essendo $\cot(\pi/2) = 0$. Il raggio di convergenza della serie di Taylor si ottiene con la formula di Cauchy-Hadamard e può essere dedotto anche osservando che le singolarità più vicine al centro della serie, $z_0 = 1/2$ sono i due poli semplici $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$, la distanza e quindi il raggio di convergenza è

$$|z_0 - p_0| = |z_0 - p_1| = \frac{1}{2}.$$

Ne consegue che la serie di Taylor converge nel disco centrato in $z_0 = 1/2$, di raggio $1/2$, che definiamo come

$$D_{1/2}(1/2) = \{z : |z - 1/2| < 1/2\}.$$

I coefficienti della serie di Taylor possono essere calcolati con la formula integrale di Cauchy per la derivata,

$$C_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{\cot(z\pi)}{(z - 1/2)^{j+1}} dz, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

dove γ è una curva chiusa contenuta nel disco di convergenza, che avvolge una sola volta il centro $z_0 = 1/2$, cioè tale che: $\gamma \in D_{1/2}(1/2)$ e $n(1/2, \gamma) = 1$. Possiamo anche scrivere

$$C_j = \text{Res} \left[\frac{\cot(z\pi)}{(z - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right], \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Consideriamo le serie a segno costante

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

le loro somme possono essere ottenute con il metodo dei residui. Infatti, definendo le funzioni

$$f_j(w) = \frac{1}{(w - 1/2)^{j+1}}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

si hanno

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_j(k), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Il metodo dei residui consiste nel calcolare i limiti degli integrali

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} \pi \frac{\cos(w\pi)}{\sin(w\pi)} f_j(w) dw &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{|w|=n+1/2} \frac{\pi \cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}} dw \\ &= \pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right] + \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, k \right] \\ &= \pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k - 1/2)^{j+1}} \\ &= \pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1}, \end{aligned}$$

sempre con $j \in \mathbb{N}$. Le funzioni integrande di questi integrali moltiplicate per w tendono uniformemente a zero sulle circonferenze centrate nell'origine di raggio $n + 1/2$ al divergere dello stesso raggio, ovvero nel limite $n \rightarrow \infty$. In particolare si ha, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\left| \pi \frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}} w \right| = \pi \frac{|\cot(w\pi)|}{|w - 1/2|^{j+1}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \leq \pi \frac{|\cot(w\pi)|}{n^{j+1}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \leq \pi \frac{M}{n^{j+1}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

dove $M \in (0, \infty)$ è il massimo valore del modulo $|\cot(w\pi)|$, che, sulle circonferenze di raggi semi-interi, è un valore finito. Di conseguenza, i limiti degli integrali sono nulli, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} \pi \frac{\cos(w\pi)}{\sin(w\pi)} f_j(w) dw = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

si ottengono così le somme delle serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1} = -\pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right], \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Questi residui coincidono con i coefficienti della serie di Taylor della funzione $\cot(z\pi)$, quindi, il j -esimo coefficiente può essere dato in forma di una serie numerica, ovvero

$$C_j = \operatorname{Res} \left[\frac{\cot(w\pi)}{(w - 1/2)^{j+1}}, \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Riscrivendo la serie di Taylor con queste espressioni per i coefficienti, si ottiene l'identità richiesta, infatti si ha

$$\cot(z\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \left(z - \frac{1}{2}\right)^j = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-j-1} \left(z - \frac{1}{2}\right)^j.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\oplus = \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sinh(x) + 1}.$$

Curiosità. Il simbolo $\oplus$ rappresenta la forma della testa della vite e, in negativo, della punta del cacciavite corrispondente, detto "a stella", o "a croce" o anche *Phillips*.

L'invenzione del **cacciavite** a scalpello, con punta piatta risale agli ultimi anni del XVIII secolo, quando nell'industriosa Londra i carpentieri sperimentarono l'efficacia del fissaggio ottenuto con viti, soprattutto a passo fine, che venivano, appunto, avvitate con questo strumento di nuova concezione. L'idea di base era quella di imporre una piccola coppia di forze alla vite, che era costruita, quindi, con una testa intagliata lungo un diametro, cosicché, inserendo la punta del cacciavite nel taglio e ruotandolo si potesse facilmente serrarla e allentarla. Tuttavia, con il diffondersi di questa tecnologia, emersero anche alcune carenze del sistema vite e cacciavite a taglio, quali la possibilità di danneggiamento della fessura della vite, nonché il non semplice centraggio del cacciavite per garantirne il pieno funzionamento. A questi problemi ovviò una nuova invenzione. Infatti nel 1836 **Henry Frank Phillips**, inventò e brevettò un'innovativa vite e il corrispondente cacciavite. La vite, detta a testa *Phillips*, è caratterizzata da un intaglio a croce che ha il vantaggio di essere auto-centrante e permette un più facile inserimento del cacciavite corrispondente, detto proprio *Phillips*, o "a stella", o anche "a croce". In seguito sono state concepite altre forme di intaglio, aventi caratteristiche tali da soddisfare le più diverse esigenze tecnico-industriali di serraggio.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Scriviamo la funzione seno iperbolico con la formula di Eulero e facciamo la sostituzione $t = e^x$, si ha

$$\oplus = 2 \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-x} + 2} = 2 \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x - 1} = 2 \Pr \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}.$$

Nella variabile t la funzione integranda è meromorfa e ha due poli semplici coincidenti con gli zeri del polinomio di secondo grado che ne rappresenta il denominatore, sono

$$t_{\pm} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Il valore principale è relativo al solo polo t_+ , poiché il polo $t_- = -1 - \sqrt{2}$, essendo strettamente negativo, non appartiene al percorso d'integrazione, il semiasse reale positivo. Riscriviamo l'integrale usando l'espansione di Mittag-Leffler dell'integranda, ovvero scrivendola come somma di poli semplici,

$$\begin{aligned} \oplus &= \frac{2}{t_+ - t_-} \left(\Pr \int_0^{\infty} \frac{dt}{t - t_+} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t - t_-} \right) \\ &= \frac{2}{t_+ - t_-} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{t_+ - \epsilon} \frac{dt}{t - t_+} + \int_{t_+ + \epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t - t_+} \right) - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t - t_-} \right] \\ &= \frac{2}{t_+ - t_-} \left(\ln(t - t_+) \Big|_0^{\infty} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(t - t_+) \Big|_{t_+ + \epsilon}^{t_+ - \epsilon} - \ln(t - t_-) \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{2}{t_+ - t_-} \left(\ln \left(\frac{t - t_+}{t - t_-} \right) \Big|_0^{\infty} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(t - t_+) \Big|_{t_+ + \epsilon}^{t_+ - \epsilon} \right). \end{aligned}$$

Il secondo termine è semplicemente $\ln(-1)$, quindi cambia il segno dell'argomento del primo logaritmo, si ha cioè

$$\oplus = \frac{2}{t_+ - t_-} \left(-\ln \left(\frac{-t_+}{-t_-} \right) + \ln(-1) \right) = -\frac{2}{t_+ - t_-} \ln \left(-\frac{t_+}{t_-} \right) = \frac{2}{t_+ - t_-} \ln \left(-\frac{t_-}{t_+} \right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right).$$

Semplificando e razionalizzando l'argomento della funzione logaritmo, si ha il risultato finale

$$\oplus = \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)

Dopo averne definito il dominio di convergenza nel piano complesso a , si calcoli l'integrale

$$\star = \int_0^\infty \frac{x^a \ln(x)}{x^3 + 1} dx.$$

Curiosità. Il simbolo $\star$ rappresenta la cosiddetta vite *Torx*. Questo tipo di incavo, grazie alla profondità e alle pareti verticali, permette di applicare coppie elevate, evitando la fuoriuscita del cacciavite.

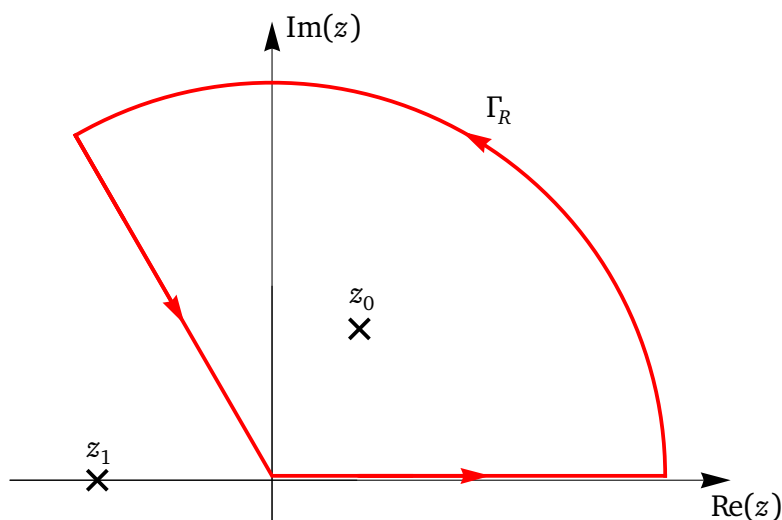
SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda è polidroma, con punti di diramazione nell'origine e all'infinito. Le sorgenti di polidromia sono due: la potenza a e la funzione logaritmo naturale. Inoltre, ha tre poli semplici nelle radici terze di -1 , ovvero nei punti dell'insieme $\{z_k = e^{i\pi(2k+1)/3}\}_{k=0}^2$, che ha intersezione vuota con il semiasse reale positivo. Il dominio di convergenza nel piano complesso a è l'insieme

$$D_a = \{a : -1 - l < \operatorname{Re}(a) < -1 - h\},$$

dove l e h , con $l, h \in \mathbb{Z}$, sono le potenze della x che descrivono il comportamento della funzione $1/(x^3 + 1)$, rispettivamente nei limiti: $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow \infty$, quindi: $l = 0$ e $h = -3$. Ne consegue che il dominio di convergenza è

$$D_a = \{a : -1 < \operatorname{Re}(a) < 2\}.$$



Consideriamo il percorso Γ_R , mostrato in figura, coincidente con la frontiera dello spicchio di cerchio centrato nell'origine di raggio $R > 1$ e che sottintende un angolo di $2\pi/3$, con un raggio sul semiasse reale positivo e uno nel secondo quadrante. Un percorso siffatto avvolge una sola volta il polo z_0 , indicato nella figura con il simbolo "x". L'integrale della stessa integranda del problema su questo percorso chiuso è dato da $2i\pi$ volte il residuo nel polo semplice z_0 , cioè si ha

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1}, z_0 \right] = \frac{2i\pi}{3} z_0^{a-2} \ln(z_0) = \frac{2i\pi}{3} e^{i\pi(a-2)/3} \frac{i\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9} e^{i\pi(a-2)/3}.$$

Questo risultato è indipendente dal valore di $R \in (1, \infty)$. Lo stesso integrale può essere scritto come somma dei tre contributi relativi ai due tratti rettilinei e all'arco γ_R , come

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz &= \int_0^R \frac{x^a \ln(x)}{x^3 + 1} dx - \int_0^R \frac{(re^{2i\pi/3})^a (\ln(r) + 2i\pi/3)}{r^3 + 1} e^{2i\pi/3} dr + \int_{\gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz \\ &= (1 - e^{2i\pi(a+1)/3}) \int_0^R \frac{x^a \ln(x)}{x^3 + 1} dx - \frac{2i\pi}{3} e^{2i\pi(a+1)/3} \int_0^R \frac{r^a}{r^3 + 1} dr + \int_{\gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz \\ &= -2ie^{i\pi(a+1)/3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right) \int_0^R \frac{x^a \ln(x)}{x^3 + 1} dx - \frac{2i\pi}{3} e^{2i\pi(a+1)/3} \int_0^R \frac{r^a}{r^3 + 1} dr + \int_{\gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz, \end{aligned}$$

dove $\gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi/3]\}$. Nel limite $R \rightarrow \infty$ e con $a \in D_a$, l'integrale sull'arco γ_R tende a zero. Infatti, il limite uniforme sullo stesso arco γ_R è

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{z^{a+1} \ln(z)}{z^3 + 1} \stackrel{U}{=} 0.$$

Per dimostrarlo, consideriamo, per $z \in \gamma_R$, la minorazione

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^{a+1} \ln(z)}{z^3 + 1} \right| &\leq \frac{R^{\operatorname{Re}(a)+1} e^{-\operatorname{Im}(a)\theta}}{R^3 - 1} \sqrt{\ln^2(R) + \theta^2} \leq \frac{R^{\operatorname{Re}(a)+1} e^{|\operatorname{Im}(a)|2\pi/3}}{R^3 - 1} \sqrt{\ln^2(R) + \frac{4\pi^2}{9}} \\ &\stackrel{R \rightarrow \infty}{\sim} R^{\operatorname{Re}(a)-2} \ln(R) e^{|\operatorname{Im}(a)|2\pi/3} \\ &\stackrel{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

poiché, dalla condizione di convergenza si ha: $\operatorname{Re}(a) - 2 > 0$.

Ne consegue che usando le espressioni in termini dei singoli contributi e del residuo si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^a \ln(z)}{z^3 + 1} dz = -2ie^{i\pi(a+1)/3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right) \star - \frac{2i\pi}{3} e^{2i\pi(a+1)/3} \int_0^\infty \frac{r^a}{r^3 + 1} dr = -\frac{2\pi^2}{9} e^{i\pi(a-2)/3},$$

da cui l'integrale richiesto

$$\star = \frac{i\pi^2}{9\operatorname{sen}(\pi(a+1)/3)} - \frac{\pi e^{i\pi(a+1)/3}}{3\operatorname{sen}(\pi(a+1)/3)} \int_0^\infty \frac{r^a}{r^3 + 1} dr.$$

L'ultimo integrale può essere calcolato con la formula di integrazione delle funzioni polidrome

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{r^3 + 1} dr = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\operatorname{sen}(a\pi)} \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}\left[\frac{r^a}{r^3 + 1}, z_k\right].$$

La somma dei tre residui moltiplicata per $e^{-ia\pi}$ è

$$e^{-ia\pi} \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}\left[\frac{r^a}{r^3 + 1}, z_k\right] = e^{-ia\pi} \sum_{k=0}^2 \frac{e^{(2k+1)(a-2)i\pi/3}}{3} = \frac{e^{i\pi(-2a-2)/3} + e^{-2i\pi} + e^{i\pi(2a+2)/3}}{3} = \frac{1 + 2\cos(2\pi(a+1)/3)}{3},$$

usando la formula di bisezione della funzione coseno

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha),$$

si ha

$$e^{-ia\pi} \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}\left[\frac{r^a}{r^3 + 1}, z_k\right] = \frac{3 - 4\operatorname{sen}^2(\pi(a+1)/3)}{3}.$$

Manipoliamo la funzione seno a denominatore come

$$\begin{aligned}
\text{sen}(a\pi) &= \text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3} + \frac{\pi(2a-1)}{3}\right) \\
&= \text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi(2a-1)}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi(2a-1)}{3}\right) \\
&= \text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi(a+1)}{3} - \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi(a+1)}{3} - \pi\right) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi(a+1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi(a+1)}{3}\right) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\left(1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\left(1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\right) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\left(3 - 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi(a+1)}{3}\right)\right),
\end{aligned}$$

si noti che il secondo fattore coincide con il numeratore della somma dei residui moltiplicata per $e^{-ia\pi}$. Alla luce di questi risultati, si ha

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{r^3+1} dr = -\pi \frac{3 - 4\text{sen}^2(\pi(a+1)/3)}{3} \frac{1}{-\text{sen}(\pi(a+1)/3)(3 - 4\text{sen}^2(\pi(a+1)/3))} = \frac{\pi}{3\text{sen}(\pi(a+1)/3)}.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione dell'integrale $\star$ della pagina precedente, otteniamo

$$\begin{aligned}
\star &= \frac{i\pi^2}{9\text{sen}(\pi(a+1)/3)} - \frac{\pi e^{i\pi(a+1)/3}}{3\text{sen}(\pi(a+1)/3)} \int_0^\infty \frac{r^a}{r^3+1} dr \\
&= \frac{i\pi^2}{9\text{sen}(\pi(a+1)/3)} - \frac{\pi^2 e^{i\pi(a+1)/3}}{9\text{sen}^2(\pi(a+1)/3)} \\
&= \pi^2 \frac{i\text{sen}(\pi(a+1)/3) - e^{i\pi(a+1)/3}}{9\text{sen}^2(\pi(a+1)/3)} = \pi^2 \frac{i\text{sen}(\pi(a+1)/3) - \cos(\pi(a+1)/3) - i\text{sen}(\pi(a+1)/3)}{9\text{sen}^2(\pi(a+1)/3)} \\
&= -\pi^2 \frac{\cos(\pi(a+1)/3)}{9\text{sen}^2(\pi(a+1)/3)},
\end{aligned}$$

da cui il risultato finale

$$\star = -\frac{\pi^2}{9 \tan(\pi(a+1)/3) \text{sen}(\pi(a+1)/3)}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Usando la base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ dello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni e il vettore $|x\rangle \in E_N$, tale che

$$\langle e_k | x \rangle \neq 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

si definiscano due operatori $\widehat{\text{A}}$ e $\widehat{\text{B}}$ tali che:

$$\widehat{\text{A}}\widehat{\text{A}} = 0, \quad \widehat{\text{A}}\widehat{\text{B}} \neq 0, \quad \|\widehat{\text{A}}\| = \|\widehat{\text{B}}\| = \|x\|, \quad \|\widehat{\text{A}}\widehat{\text{B}}\| = \|x\|^2.$$

Si determinino gli autovettori e gli autovalori degli operatori $\widehat{\text{A}}$ e $\widehat{\text{B}}$.

Aire. Potrebbe essere utile costruire gli operatori in forma di prodotti *ket-bra*.

Curiosità. I simboli A e B rappresentano rispettivamente le teste delle viti: a stella a tre punte e la cosiddetta *one-way*. La prima è denominata anche *tri-wing* ed è caratterizzata da una stella che non ha simmetria centrale. La seconda, invece, ha una forma tale da permettere solo di avvitare la vite con un cacciavite piatto. Da qui la denominazione *one-way*, ovvero a una sola via.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Partiamo dalla condizione di prodotto nullo $\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}} = 0$. Scegliamo due vettori distinti della base, che, per definizione, sono ortogonali, hanno cioè prodotto nullo. Siano $m, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, con $m \neq n$, allora $\langle e_m | e_n \rangle = 0$. Con questi e col vettore $|x\rangle$ dato, definiamo i due operatori

$$\widehat{\mathbf{A}} = |x\rangle\langle e_m|, \quad \widehat{\mathbf{B}} = |e_n\rangle\langle x|,$$

che verificano la prima condizione, ma anche la seconda. Infatti, la prima è

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}} = |x\rangle\langle e_m|e_n\rangle\langle x| = 0,$$

mentre il prodotto nell'ordine inverso dà l'operatore

$$\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}} = |e_n\rangle\langle x|x\rangle\langle e_m| = \|x\|^2 |e_n\rangle\langle e_m| \neq 0.$$

Per verificare che non è l'operatore nullo, è sufficiente applicarlo allo stesso vettore $|e_m\rangle$, si ha

$$\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}}|e_m\rangle = \|x\|^2 |e_n\rangle\langle e_m|e_m\rangle = \|x\|^2 |e_n\rangle \neq |0\rangle,$$

il fatto che esista almeno un vettore non trasformato nel vettore nullo dall'operatore, assicura che questo non sia l'operatore nullo.

Calcoliamo le norme, quella dell'operatore $\widehat{\mathbf{A}}$ è

$$\|\widehat{\mathbf{A}}\| = \sup_{\|w\|=1} \{\|\widehat{\mathbf{A}}|w\rangle\| \},$$

consideriamo la scomposizione rispetto alla base data del generico vettore a norma unitaria $|w\rangle$,

$$|w\rangle = w^k |e_k\rangle,$$

con $w^k = \langle e_k | w \rangle$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, in termini della quale la norma è

$$1 = \|w\|^2 = \sum_{k=1}^N |w^k|^2.$$

L'azione dell'operatore $\widehat{\mathbf{A}}$ dà

$$\widehat{\mathbf{A}}|w\rangle = |x\rangle\langle e_m|w\rangle = |x\rangle w^m,$$

la cui norma è

$$\|\widehat{\mathbf{A}}|w\rangle\| = \| |x\rangle w^m \| = \|x\| |w^m|.$$

L'estremo superiore di questa quantità al variare del vettore $|w\rangle$, con la condizione della norma unitaria, rappresenta la norma dell'operatore $\widehat{\mathbf{A}}$ ed è

$$\|\widehat{\mathbf{A}}\| = \sup_{\|w\|=1} \{\|\widehat{\mathbf{A}}|w\rangle\| \} = \sup_{\|w\|=1} \{ \|x\| |w^m| \} = \sup_{|w^m| \leq 1} \{ \|x\| |w^m| \} = \|x\|,$$

nell'ultima identità abbiamo sostituito la condizione $\|w\| = 1$ con $|w^m| \leq 1$.

La norma dell'operatore $\widehat{\mathbf{B}}$ ha la stessa definizione, cioè

$$\|\widehat{\mathbf{B}}\| = \sup_{\|w\|=1} \{\|\widehat{\mathbf{B}}|w\rangle\| \}.$$

L'azione dell'operatore $\widehat{\mathbf{B}}$ sul vettore a norma unitaria $|w\rangle$, considerando ancora la sua decomposizione rispetto alla base data, è

$$\widehat{\mathbf{B}}|w\rangle = |e_n\rangle\langle x|w\rangle,$$

la norma di questo vettore può essere minorata usando la disuguaglianza di Schwarz come

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| = \| |e_n\rangle \langle x|w\rangle \| = \underbrace{\|e_n\|}_{=1} |\langle x|w\rangle| \leq \|x\| \underbrace{\|w\|}_{=1} = \|x\| ,$$

da cui l'estremo superiore, che dà la norma dell'operatore,

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}} \right\| = \sup_{\|w\|=1} \left\{ \left\| \widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| \right\} = \|x\| ,$$

che si ha quando la disuguaglianza di Schwarz vale come identità. Ciò accade quando il vettore a norma unitaria $|w\rangle$ è il versore del vettore $|x\rangle$, cioè quando $|w\rangle = |x\rangle / \|x\|$. Infatti, riprendendo la norma del vettore $\widehat{\mathbf{S}}|w\rangle$, si ha

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| = \| |e_n\rangle \langle x|w\rangle \| = \left| \frac{\langle x|x\rangle}{\|x\|} \right| = \|x\| .$$

Calcoliamo la norma dell'operatore prodotto $\widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}}$. La norma del vettore che si ottiene dalla sua azione sul generico vettore a norma unitaria $|w\rangle$ è

$$\widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}}|w\rangle = \|x\|^2 |e_n\rangle \langle e_m|w\rangle = \|x\|^2 |e_n\rangle w^m ,$$

la cui norma verifica la limitazione

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| = \|x\|^2 |w^m| \leq \|x\|^2 ,$$

poiché, come già ribadito, tutte le componenti contro-varianti del vettore $|w\rangle$ verificano la condizione: $|w^k| \leq 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$, come conseguenza della norma unitaria. L'estremo superiore della quantità data nella precedente equazione è la norma cercata e si ha

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}} \right\| = \sup_{\|w\|=1} \left\{ \left\| \widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| \right\} = \|x\|^2 .$$

Anche in questo caso si ha la saturazione della disuguaglianza quando il vettore $|w\rangle$ è parallelo alla direzione di $|e_m\rangle$, ovvero ha la sola componente contro-variante m -esima non nulla e, per la normalizzazione, il modulo di questa componente è unitario, cioè $|w^m| = 1$, da cui segue

$$\left\| \widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{S}}|w\rangle \right\| = \|x\|^2 |w^m| = \|x\|^2 .$$

L'equazione agli autovalori dell'operatore $\widehat{\mathbf{S}}$ è

$$\widehat{\mathbf{S}}|t\rangle = \tau|t\rangle ,$$

dove $|t\rangle$ e τ sono rispettivamente l'autovettore e l'autovalore corrispondente. Dalla definizione dell'operatore si ha

$$\widehat{\mathbf{S}}|t\rangle = |x\rangle \langle e_m|t\rangle = t^m|x\rangle = \tau|t\rangle ,$$

dove t^m è l' m -esima componente contro-variante del vettore $|t\rangle$ rispetto alla base data. Dall'ultima identità segue che un autovettore è proprio il vettore $|x\rangle$ e ha come autovalore la sua m -esima componente contro-variante x^m . Infatti, facendo agire l'operatore $\widehat{\mathbf{S}}$ sul vettore $|x\rangle$ si ha

$$\widehat{\mathbf{S}}|x\rangle = |x\rangle \langle e_m|x\rangle = x^m|x\rangle ,$$

con anche $x^m \neq 0$, come dato dalle condizioni del problema. Per ogni altro vettore $|t\rangle$ diverso dal vettore $|x\rangle$ e non ortogonale al vettore $|e_m\rangle$, ovvero tale che:

$$|t\rangle \neq |x\rangle , \quad \langle e_m|t\rangle = t^m \neq 0 ,$$

si ha

$$\widehat{\mathbf{S}}|t\rangle = t^m|x\rangle \neq \tau|t\rangle , \quad \forall \tau \in \mathbb{C} .$$

Ne consegue che gli altri $N - 1$ autovettori sono tutti i vettori ortogonali al vettore $|e_m\rangle$, quindi possiamo scegliere quelli dell'insieme che si ottiene dalla base data, privata del vettore $|e_m\rangle$, cioè l'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1, k \neq m}^N$. Infatti, facendo agire l'operatore su questi vettori si hanno le equazioni

$$\widehat{\odot}|e_k\rangle = |x\rangle\langle e_m|e_k\rangle = |0\rangle = 0|e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N\}.$$

Ne consegue che l'operatore $\widehat{\odot}$ ha un autovalore non degenere $\tau_m = x^m \neq 0$ e l'autovalore nullo, che, nel caso $N > 2$, è degenere con ordine di degenerazioni $N - 1 > 1$, cioè $\tau_k = 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N\}$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$|t_m\rangle = \frac{|x\rangle}{\|x\|}, \quad |t_k\rangle = |e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N\}.$$

L'insieme degli autovettori dell'autovalore nullo degenere non è unico, possiamo scegliere ogni base dello spazio $N - 1$ dimensionale ortogonale al vettore $|e_m\rangle$, ovvero dello spazio di Hilbert $E_{N-1} = \{|\nu\rangle \in E_N : \langle e^m|\nu\rangle = 0\}$.

L'equazione agli autovalori dell'operatore $\widehat{\odot}$ è

$$\widehat{\odot}|o\rangle = \omega|o\rangle,$$

dove si sono indicati con $|o\rangle$ e ω l'autovettore e l'autovalore corrispondente. Dalla definizione dell'operatore si ha

$$\widehat{\odot}|o\rangle = \langle x|o\rangle|e_n\rangle = \omega|o\rangle,$$

quindi un autovettore è l' n -esimo vettore della base, ovvero: $|o\rangle = |e_n\rangle$, l'autovalore corrispondente è l' n -esima componente covariante del vettore $|x\rangle$, che coincide con il complesso coniugato dell' n -esima componente controvariante, cioè $x_n = x^{n*} = \langle x|e_n\rangle$. In particolare si ha l'equazione agli autovalori

$$\widehat{\odot}|e_n\rangle = \langle x|e_n\rangle|e_n\rangle = x_n|e_n\rangle = x^{n*}|e_n\rangle.$$

Gli altri $N - 1$ autovettori si ottengono con un ragionamento analogo a quello del caso precedente. Questa volta, però, consideriamo una base dello spazio di Hilbert a dimensione $N - 1$ ortogonale al vettore $|x\rangle$, cioè $E'_{N-1} = \{|u\rangle \in E_N : \langle x|u\rangle = 0\}$, sia $\{|s_j\rangle\}_{j=1}^{N-1} \subset E'_{N-1}$ l'insieme dei vettori di questa base. Le equazioni agli autovalori sono

$$\widehat{\odot}|s_j\rangle = \langle x|s_j\rangle|e_n\rangle = |0\rangle = 0|s_j\rangle, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

gli autovettori dell'insieme hanno tutti lo stesso autovalore, che, nel caso $N > 2$, è degenere con ordine di degenerazione $N - 1 > 1$. In definitiva, l'operatore $\widehat{\odot}$ ha un autovalore non degenere $\omega_N = x^{n*} \neq 0$ e non nullo, e l'autovalore nullo con ordine di degenerazione $N - 1$, cioè: $\omega_j = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Gli autovettori sono

$$|o_N\rangle = |e_n\rangle, \quad |o_j\rangle = \frac{|s_j\rangle}{\|s_j\|}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

dove abbiamo considerato il caso generale in cui i vettori della base $\{|s_j\rangle\}_{j=1}^{N-1} \subset E'_{N-1}$ possano essere non normalizzati.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Usando l'equazione di Parseval generalizzata per le trasformate di Fourier, si dimostri il limite formale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \odot(x) = \delta(x),$$

dove

$$\odot(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

e $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac.

Curiosità. Il simbolo $\odot$ rappresenta la testa di una vite *Torx*, del tipo descritto nel terzo problema, dotato, in più di un foro centrale che impedisce l'inserimento di un cacciavite *Torx* normale o anche di un semplice cacciavite piatto.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Come suggerito, usiamo l'equazione di Parseval generalizzata che sancisce l'identità tra il prodotto scalare di due funzioni e quello delle trasformate di Fourier delle stesse.

Consideriamo l'identità

$$(\otimes, f) = (\mathcal{F}_k[\otimes], \mathcal{F}_k[f]),$$

che coincide alla forma integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \otimes^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_k[\otimes]^* \mathcal{F}_k[f] dk,$$

dove $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ è una generica funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$. Calcoliamo il prodotto inserendo il limite richiesto

$$\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \otimes, f \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\otimes, f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\mathcal{F}_k[\otimes], \mathcal{F}_k[f]) = \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_k[\otimes], \mathcal{F}_k[f] \right).$$

La trasformata di Fourier della funzione data, è nota ed è

$$\mathcal{F}_k[\otimes] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-k^2\epsilon}}{2\pi\sqrt{2\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon}} + ik\sqrt{\epsilon}\right)^2} dx = \left\{ u = \frac{x}{2\sqrt{\epsilon}} + ik\sqrt{\epsilon} \right\} = \frac{e^{-k^2\epsilon}}{\pi\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du}_{=\sqrt{\pi}},$$

quindi

$$\mathcal{F}_k[\otimes] = \frac{e^{-k^2\epsilon}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Usando questo risultato nel limite del prodotto scalare, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \otimes, f \right) &= \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_k[\otimes], \mathcal{F}_k[f] \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_k[\otimes]^* \mathcal{F}_k[f] dk \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k^2\epsilon}}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k[f] dk = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathcal{F}_k[f] \right), \end{aligned}$$

da cui si deduce che la trasformata di Fourier del limite della funzione è la costante $1/\sqrt{2\pi}$, cioè

$$\mathcal{F}_k \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \otimes(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Facciamo l'anti-trasformata di Fourier per ottenere il limite richiesto, ovvero

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \otimes(x) = \mathcal{F}_{-x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk.$$

L'ultimo integrale è una rappresentazione della distribuzione delta di Dirac, si arriva quindi all'identità finale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \otimes(x) = \delta(x).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che i due operatori hermitiani $\widehat{\blacksquare}$ e $\widehat{\bullet}$ verificano la relazione

$$[\widehat{\blacksquare}, \widehat{\bullet}] = \alpha \widehat{\bullet},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, si dimostri che l'operatore $\widehat{\blacksquare}$ non è limitato e che, indicando con ω_0 il suo autovalore minimo e con $|o_0\rangle$ l'autovettore corrispondente, tutti i vettori della successione $\{\widehat{\bullet}^n |o_0\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ sono autovettori dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$. Infine, se ne determinino gli autovalori in funzione dell'autovalore minimo ω_0 e del parametro reale α .

Curiosità. I simboli $\blacksquare$ e $\bullet$ rappresentano le teste di viti con cavità quadrata e con cavità esagonale. La prima ha una forma con pareti non perfettamente verticali, e quindi leggermente rastremata per facilitare l'inserimento del cacciavite. È detta anche testa *Robertson*, dal nome dell'inventore canadese **Peter Lyburner Robertson**. La seconda, la testa con cavità esagonale è la classica brugola, detta anche *Allen* ed è utilizzata soprattutto per il fissaggio dei mobili. Il nome *Allen* è quello della ditta statunitense, la *Allen Manufacturing Company*, che ne iniziò la produzione e la commercializzazione nel 1910. Mentre il nome brugola deriva dal cognome dell'inventore **Eugenio Brugola**, appunto, fondatore delle omonime *Officine Eugenio Brugola* (OEB) di Lissone, che produssero e misero in commercio queste viti in Italia a partire dal 1926.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Siano $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{|o_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ gli insiemi degli autovalori e autovettori corrispondenti dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\widehat{\blacksquare} |o_k\rangle = \omega_k |o_k\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Applicando l'operatore commutatore al k -esimo autovettore, con $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} [\widehat{\blacksquare}, \widehat{\bullet}] |o_k\rangle &= \alpha \widehat{\bullet} |o_k\rangle \\ \widehat{\blacksquare} \widehat{\bullet} |o_k\rangle - \widehat{\bullet} \widehat{\blacksquare} |o_k\rangle &= \alpha \widehat{\bullet} |o_k\rangle \\ \widehat{\blacksquare} \widehat{\bullet} |o_k\rangle - \omega_k \widehat{\bullet} |o_k\rangle &= \alpha \widehat{\bullet} |o_k\rangle \quad \Rightarrow \quad \widehat{\blacksquare} \widehat{\bullet} |o_k\rangle = (\omega_k + \alpha) \widehat{\bullet} |o_k\rangle, \end{aligned}$$

da cui si deduce che il vettore $\widehat{\bullet} |o_k\rangle$ è autovettore dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$ con autovalore $\omega_k + \alpha$.

Applicando n volte, con $n \in \mathbb{N}$, l'operatore $\widehat{\bullet}$ all'autovettore $|o_0\rangle$, che ha autovalore minimo si ha

$$\widehat{\bullet}^n |o_0\rangle = \widehat{\bullet}^{n-1} \widehat{\bullet} |o_0\rangle = \widehat{\bullet}^{n-1} |o_{\omega_0+\alpha}\rangle = \widehat{\bullet}^{n-2} |o_{\omega_0+2\alpha}\rangle = \widehat{\bullet} |o_{\omega_0+(n-1)\alpha}\rangle = |o_{\omega_0+n\alpha}\rangle,$$

dove con $|o_{\omega_0+n\alpha}\rangle$ è l'autovettore dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$ con autovalore $\omega_0 + n\alpha$, per cui si ha l'equazione agli autovalori

$$\widehat{\blacksquare} |o_{\omega_0+n\alpha}\rangle = (\omega_0 + n\alpha) |o_{\omega_0+n\alpha}\rangle.$$

Abbiamo quindi dimostrato che i vettori dell'insieme $\{\widehat{\bullet}^n |o_0\rangle = |o_{\omega_0+n\alpha}\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ sono autovettori dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$ e ne abbiamo determinato l'insieme degli autovalori $\{\omega_0 + n\alpha\}_{n=0}^{\infty}$, il caso $n = 0$ è banale. Per verificare che l'operatore hermitiano $\widehat{\blacksquare}$ non è limitato è sufficiente osservare che l'insieme dei suoi autovalori non è esso stesso limitato, basta considerare quelli della successione $\{\omega_0 + n\alpha\}_{n=0}^{\infty}$, il limite dei moduli è divergente, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_0 + n\alpha| = \infty.$$

La norma dell'operatore $\widehat{\blacksquare}$, che essendo hermitiano e quindi normale, coincide con il massimo dei moduli degli autovalori, è quindi infinita, ovvero

$$\|\widehat{\blacksquare}\| = \max_{k \in \mathbb{N}} \{|\omega_k|\} = \infty,$$

l'operatore $\widehat{\blacksquare}$ non è limitato.