Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello invernale - 15 gennaio 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si calcoli l'integrale

$$ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3}{\operatorname{senh}^3(u)} du \,.$$

Curiosità. Il simbolo rappresenta la lettera "f" dell'alfabeto della lingua kriptoniana o kriptonese, ovvero del pianeta *Kripton*, pianeta nativo di *Superman*. Dopo la prima comparsa in un fumetto come una sequenza casuale di simboli, durante gli anni '70 Edward Nelson Bridwell, uno degli autori di *Superman*, concepì, a partire dai primi simboli, un alfabeto di 118 lettere, che battezzò kriptonese. Nel 2000 la *DC Comics*, casa editrice statunitense del fumetto, pubblicò la traslitterazione dell'alfabeto, associandone i simboli alle lettere dell'alfabeto inglese. In questa occasione si introdusse anche il termine *kriptoniano* per definire il linguaggio e l'alfabeto. Una versione più complicata dell'alfabeto kriptoniano apparve successivamente nella serie televisiva *Smallville*.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa, in quanto rapporto di funzioni intere. Le singolarità coincidono con gli zeri della funzione seno iperbolico, che non sono cancellati da zeri di ordine uguale o superiore del polinomio a numeratore. Ne consegue che l'insieme dei poli è $\{z_k = ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$. Nell'origine, la funzione integranda ha una singolarità eliminabile, infatti

$$\lim_{u\to 0} \frac{u^3}{\operatorname{senh}^3(u)} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{u}{\operatorname{senh}(u)}\right)^3 = 1\,.$$

Facciamo il cambiamento di variabile $x = u + i\pi/2$, in questo modo la funzione integranda conterrà la funzione coseno iperbolico che non ha singolarità sull'asse reale, infatti, posto $u = x - i\pi/2$,

$$ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-i\pi/2)^3}{(-i)^3\cosh^3(x)} dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - 3x^2 i\pi/2 - 3x\pi^2/4 + i\pi^3/8}{\cosh^3(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-3x^2\pi/2 + \pi^3/8}{\cosh^3(x)} dx\,,$$

nell'ultima indennità abbiamo considerato solo i contributi non nulli, ovvero sono state eliminate le integrande dispari. Rinominiamo i due contributi come segue

$$ = -\frac{3\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh^3(x)} + \frac{\pi^3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)} = -\frac{3\pi}{2}A + \frac{\pi^3}{8}B\,,$$

cioè

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh^3(x)}\,, \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)}\,.$$

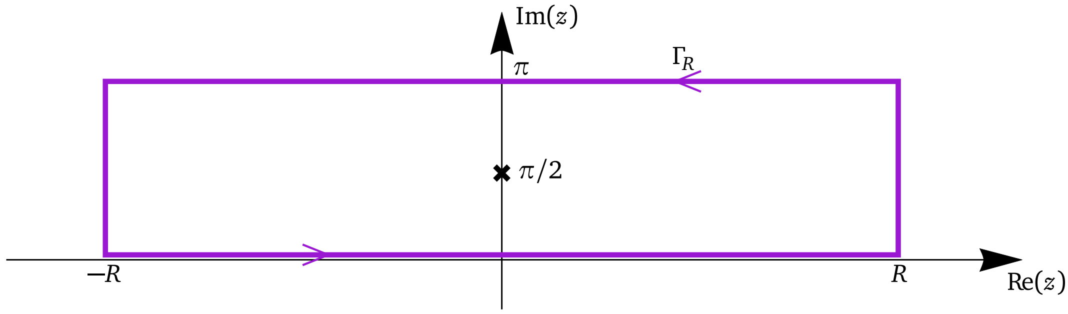
Entrambe le funzioni integrande posseggono lo stesso insieme di poli $\{p_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Sono poli di ordine tre, in quanto zeri dello stesso ordine della funzione a denominatore non cancellati da zeri di ordine uguale o maggiore della funzione a numeratore. In essi si annullano, infatti, la funzione $\cosh^3(z)$, e le sue derivate prima e seconda, mentre la derivata terza è diversa da zero. In particolare, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, si hanno

$$
\begin{aligned}
\frac{d^0}{dz^0}\cosh^3(z)\bigg|_{z=p_k} &= \cosh^3(z)\big|_{z=p_k} = 0\,,\\
\frac{d}{dz}\cosh^3(z)\bigg|_{z=p_k} &= 3\cosh^2(z)\,\mathrm{senh}(z)\big|_{z=p_k} = 0\,,\\
\frac{d^2}{dz^2}\cosh^3(z)\bigg|_{z=p_k} &= \big(6\cosh(z)\,\mathrm{senh}^2(z) + 3\cosh^3(z)\big)\big|_{z=p_k} = 0\,,\\
\frac{d^3}{dz^3}\cosh^3(z)\bigg|_{z=p_k} &= \big(6\,\mathrm{senh}^3(z) + 21\cosh^2(z)\,\mathrm{senh}(z)\big)\big|_{z=p_k} = 6i^3(-1)^k = 6i(-1)^{k+1} \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Per calcolare gli integrali A e B, consideriamo il percorso rettangolare

$$\Gamma_R = [R, R] \cup [R, R+i\pi] \cup [R+i\pi, -R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R]\,,$$

mostrato in figura. Per ogni valore di $R \in (0,\infty)$, esso avvolge una sola volta il polo $p_0 = i\pi/2$ delle funzioni integrande di entrambi gli integrali A e B.



Ne consegue che l'integrale su tale percorso della funzione integranda dell'integrale B, anche nel limite $R \to \infty$, può essere espresso sia come $2i\pi$-volte il residuo in p_0, che come somma dei contributi relativi ai quattro tratti rettilinei la cui unione dà il rettangolo Γ_R. I due contributi dei tratti orizzontali coincidono con l'integrale B, ovvero

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{\cosh^3(z)} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = 2B + \lim_{R\to\infty} i\left(\int_0^\pi \frac{dy}{\cosh^3(R+iy)} - \int_0^\pi \frac{dy}{\cosh^3(-R+iy)}\right).$$

I contributi dei tratti verticali, invece, sono infinitesimi nel limite $R \to \infty$. Lo dimostriamo sfruttando la disuguaglianza di Darboux per cui, posto $z = \pm R + iy$, sui tratti rispettivamente di destra (segno "+") e sinistra (segno "−"), si ha

$$\left|\int_0^\pi \frac{i\,dy}{\cosh^3(\pm R+iy)}\right| = \left|8\int_0^\pi \frac{i\,dy}{\left(e^{\pm R+iy} + e^{\mp R-iy}\right)^3}\right| \le 8\int_0^\pi \frac{dy}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|^3} = 8\frac{\pi}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|^3} \underset{R\to\infty}{\sim} 8e^{-|R|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ne consegue che l'integrale B è proporzionale al residuo, ovvero

$$B = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right].$$

Per calcolarlo usiamo lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $p_0 = i\pi/2$ della funzione coseno iperbolico

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\cosh(z)\bigg|_{i\pi/2}\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\,\mathrm{senh}(z)\bigg|_{i\pi/2}\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^{2k+1} = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - i\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

unitamente alla formula della somma della derivata terza della serie geometrica, che permette di esprimere in forma di serie di potenze l'inverso del cubo della funzione. Usando una serie di ragione α si ha

$$\frac{1}{(1-\alpha)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} = 1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 10\alpha^3 + \mathcal{O}\left(\alpha^4\right),$$

con $|\alpha| < 1$. Per l'inverso del cubo della funzione coseno iperbolico, con $z \to p_0 = i\pi/2$, avremo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh^3(z)} &= \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^{-3} = \frac{i}{(z-i\pi/2)^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i\pi/2)^{2k}}{(2k+1)!} \right)^{-3} \\
&= \frac{i}{(z-i\pi/2)^3} \left(1 + \frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right) \right)^{-3} \\
&= \frac{i}{(z-i\pi/2)^3} \left[1 - 3\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right) \right) \right. \\
&\quad + 6\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right) \right)^2 \\
&\quad \left. - 10\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right) \right)^3 + \cdots \right] \\
&= \cdots + \frac{-i/2}{z-i\pi/2} + \cdots .
\end{aligned}$$

Da cui si ottiene il residuo cercato, che coincide con il coefficiente -1 della serie ed è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = -\frac{i}{2}.$$

Quindi l'integrale B vale

$$B = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Per il calcolo dell'integrale A usiamo lo stesso percorso rettangolare Γ_R e la stessa procedura, cioè, consideriamo il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{z^2 dz}{\cosh^3(z)} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] &= A + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 + 2i\pi z - \pi^2}{\cosh^3(z)} dz \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} i \left(\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^2 dy}{\cosh^3(R+iy)} - \int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)^2 dy}{\cosh^3(-R+iy)} \right) \\
&= 2A - \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\cosh^3(z)} \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} i \left(\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^2 dy}{\cosh^3(R+iy)} - \int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)^2 dy}{\cosh^3(-R+iy)} \right) \\
&= 2A - \pi^2 B \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} i \left(\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^2 dy}{\cosh^3(R+iy)} - \int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)^2 dy}{\cosh^3(-R+iy)} \right).
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, l'integrale ha due espressioni, l'una come $2i\pi$-volte il residuo nel polo $p_0 = i\pi/2$ e l'atra come somma dei contributi sui tratti rettilinei di Γ_R. Nel limite $R \to \infty$, i contributi sui tratti orizzontali non nulli, ovvero quelli con funzioni integrande pari, sono espressi in termini degli integrali A e B. Quelli sui tratti verticali hanno invece limite nullo, infatti si ha

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{(\pm R + iy)^2 i dy}{\cosh^3(\pm R + iy)} \right| \leq 8 \int_0^{\pi} \frac{\left(R^2 - y^2\right) + 2Ry}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|^3} dy \leq 8 \frac{R(R+2\pi)}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|^3} \underset{R\to\infty}{\sim} 8R(R+2\pi)e^{-|R|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ne consegue

$$A = i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] + \frac{\pi^2}{2} B = i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] + \frac{\pi^3}{4}.$$

Per il calcolo del residuo, sfruttiamo lo sviluppo in serie di Taylor del caso precedente, considerando opportunamente il fattore z^2, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{\cosh^3(z)} &= \frac{(z - i\pi/2 + i\pi/2)^2}{\cosh^3(z)} = \frac{(z-i\pi/2)^2 + i\pi(z-i\pi/2) - \pi^2/4}{\cosh^3(z)} \\
&= \left(\frac{i}{z-i\pi/2} - \frac{\pi}{(z-i\pi/2)^2} - \frac{i\pi^2/4}{(z-i\pi/2)^3}\right)\left[1 - 3\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right)\right)\right. \\
&\qquad +6\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right)\right)^2 \\
&\qquad \left. -10\left(\frac{(z-i\pi/2)^2}{3!} + \frac{(z-i\pi/2)^4}{5!} + \mathcal{O}\left((z-i\pi/2)^6\right)\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \cdots + \frac{i + i\pi^2/8}{z - i\pi/2} + \cdots.
\end{aligned}$$

Il residuo, coincidente con il coefficiente -1 della serie, è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = i\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

Da cui si ottiene il valore dell'integrale A

$$A = i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] + \frac{\pi^3}{4} = -\pi + \frac{\pi^3}{8}.$$

Infine, l'integrale cercato, che è combinazione degli integrali A e B, vale

$$= -\frac{3\pi}{2} A + \frac{\pi^3}{8} B = \frac{3\pi^2}{2} - \frac{3\pi^4}{16} + \frac{\pi^4}{16} = \frac{3\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{8},$$

cioè

$$= \frac{\pi^2}{8}\left(12 - \pi^2\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{5/3}}{(x+1)^3} dx.$$

Curiosità. Il simbolo rappresenta la lettera "h" dell'alfabeto kriptoniano.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma e ha punti di diramazione in $z = 1$ e all'infinito. Facciamo il cambiamento di variabile $w = x - 1$, cosicché l'integrale diventa

$$= \int_0^\infty \frac{w^{5/3}}{(w+2)^3} dw = \int_0^\infty w^{2/3} Q(w) dw,$$

dove si è definita la funzione razionale

$$Q(w) = \frac{w}{(w+2)^3}.$$

Questa funzione ha un'unica singolarità, un polo triplo in $w = -2$. Possiamo usare la formula per l'integrazione delle funzioni polidrome

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) = -\frac{\pi e^{-i\alpha\pi}}{\mathrm{sen}(\alpha\pi)} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,[z^\alpha R(z), z_k]\,,$$

dove $R(z)$ è una funzione razionale e quindi meromorfa, che ha come singolarità i soli poli dell'insieme $\{z_k\}_{k=1}^N$, tale che $\{z_k\}_{k=1}^N \cap (-\infty, 0) = \varnothing$, ovvero i poli non appartengono al percorso d'integrazione. Il numero complesso α non è un numero relativo e verifica la condizione di convergenza dell'integrale

$$-1 - l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1 - h\,,$$

dove $l, h \in \mathbb{Z}$ sono le potenze che definiscono il comportamento della funzione razionale nell'origine e all'infinito, cioè

$$R(z) \underset{z\to 0}{\sim} [\mathrm{cost.}]\, z^l\,, \qquad R(z) \underset{z\to\infty}{\sim} [\mathrm{cost.}]\, z^h\,.$$

Nel caso del problema, per la funzione razionale $Q(w) = w/(w+2)^3$ si hanno i comportamenti

$$Q(w) \underset{w\to 0}{\sim} [\mathrm{cost.}]\, 1 = w^0\,, \qquad Q(w) \underset{w\to\infty}{\sim} [\mathrm{cost.}]\, w^{-2}\,,$$

ovvero: $l = 0$ e $h = -2$, mentre $\alpha = 2/3$. La condizione di convergenza è verificata, infatti,

$$-1 - l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1 - h \quad \Longrightarrow \quad -1 < \frac{2}{3} < 1\,.$$

Ne consegue che l'integrale può essere calcolato come

$$= -\frac{\pi e^{-2i\pi/3}}{\mathrm{sen}(2\pi/3)} \mathrm{Res}\left[\frac{w}{(w+2)^3} w^{2/3}, -2\right].$$

Il residuo del polo triplo si ottiene come derivata seconda della funzione integranda moltiplicata per $(w+2)^2/2!$ e valutata in $w = -2$, ovvero

$$\mathrm{Res}\left[\frac{w}{(w+2)^3} w^{2/3}, -2\right] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2} w^{5/3}\bigg|_{-2} = \frac{1}{2}\frac{5}{3}\frac{2}{3}(-2)^{-1/3} = \frac{5}{9} 2^{-1/3} e^{-i\pi/3}\,,$$

dove la determinazione di -1, cioè $-1 = e^{i\pi}$ si ricava dalla scelta obbligata: $\arg(w) \in (0, 2\pi)$ come determinazione principale. Sapendo che $\mathrm{sen}(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, si ha

$$= -\frac{\pi e^{-2i\pi/3}}{\mathrm{sen}(2\pi/3)} \mathrm{Res}\left[\frac{w}{(w+2)^3} w^{2/3}, -2\right] = -\frac{\pi e^{-i\pi}}{\sqrt{3}/2}\frac{5}{9} 2^{-1/3}\,,$$

che, con le dovute semplificazioni, dà il risultato finale

$$= \frac{2^{2/3} 5}{9\sqrt{3}} \pi\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la somma della serie

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - \cos(k\pi)}\,.$$

Curiosità. Il simbolo  rappresenta la lettera "s" dell'alfabeto kriptoniano. Si noti la somiglianza con la "s" maiuscolo incastonata simbolo di *Superman*.

Soluzione del terzo problema

Usiamo il valore $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, e separiamo i termini pari e dispari, si ha

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2+1} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2\,,$$

dove si è posto

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\,, \qquad \mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2+1}\,.$$

Calcoliamo le somme delle due serie così ottenute usando il metodo dei residui. Per la prima $\mathcal{S}_1$, definiamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{4z^2-1}\,\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\,,$$

che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ovvero gli zeri della funzione seno, mentre i poli semplici coincidenti con gli zeri semplici del polinomio $4z^2-1$, $z_\pm = \pm 1/2$, sono singolarità eliminabili, in quanto sono cancellate dagli zeri semplici che la funzione coseno ha negli stessi punti. Infatti, usando la regola di De l'Hôpital,

$$\lim_{z\longrightarrow z_\pm} f(z) = \lim_{z\longrightarrow z_\pm} \frac{\cos(z\pi)}{4z^2-1}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} = \lim_{z\longrightarrow z_\pm} \frac{-\pi\operatorname{sen}(z_\pm\pi)}{8z_\pm}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}(z_\pm\pi)} = \mp\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} f(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} f(z)dz = \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}[f(z),k]\,,$$

con $n\in\mathbb{N}$ e ne studiamo il comportamento nel limite $n\to\infty$. Il modulo della funzione integranda sul percorso d'integrazione, la circonferenza centrata nell'origine di raggio $n+1/2$, con $n\in\mathbb{N}$, può essere limitato come

$$\left|\frac{1}{4z^2-1}\,\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right| = \pi\frac{1}{4(n+1/2)^2-1}\left|\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| \le \pi\frac{1}{4(n+1/2)^2-1}\,\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|}\,,$$

dove y è la parte immaginaria di z, cioè: $z = x+iy$. Nel limite $n\to\infty$ e quindi $|z| = n+1/2\to\infty$, si hanno tre possibilità per l'andamento di y, ovvero: $y\to+\infty$, $y\to-\infty$ e $y=0$, quest'ultimo caso si ha quando z diverge lungo l'asse reale positivo o negativo, quindi $|z| = |x| = n+1/2$, cioè $x = \pm(n+1/2)$. Nei primi due casi, $y\to\pm\infty$, si ha

$$\left|\frac{1}{4z^2-1}\,\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right| \le \pi\frac{1}{4(n+1/2)^2-1}\,\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} \underset{y\to\pm\infty}{\overset{n\to\infty}{\sim}} \pi\frac{1}{4(n+1/2)^2-1} \to 0\,.$$

Nel terzo caso, con $y=0$ e $x=\pm(n+1/2)$,

$$\left|\frac{1}{4z^2-1}\,\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right| = \pi\frac{1}{4(n+1/2)^2-1}\,\frac{\cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = 0$$

Ne consegue che

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}[f(z),k]\,.$$

Poiché il k-esimo residuo, con $k\in\mathbb{Z}$, è

$$\operatorname{Res}[f(z),k] = \frac{1}{4k^2-1}\,,$$

si ha

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} - \left.\frac{1}{4k^2-1}\right|_{k=0} = 2\mathcal{S}_1 + 1\,,$$

da cui si ottiene la somma della prima serie

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Per calcolare la somma della seconda serie definiamo la funzione

$$g(z) = \frac{1}{(2z+1)^2+1}\,\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,.$$

Le singolarità sono i poli semplici nei punti dell'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, dovuti alla funzione seno a denominatore, cui si aggiungono altri due poli semplici coincidenti con gli zeri del polinomio di secondo grado, anch'esso a denominatore, $(2z+1)^2+1$, ovvero $z_\pm = (-1\pm i)/2$. Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} g(z)dz = \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}[g(z),k] + \operatorname{Res}\left[g(z),\frac{-1-i}{2}\right] + \operatorname{Res}\left[g(z),\frac{-1+i}{2}\right],$$

con $n\in\mathbb{N}$ e, anche in questo caso, si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} g(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}[g(z),k] + \operatorname{Res}\left[g(z),\frac{-1-i}{2}\right] + \operatorname{Res}\left[g(z),\frac{-1+i}{2}\right].$$

I residui nei numeri relativi sono

$$\operatorname{Res}[g(z),k] = \frac{1}{(2k+1)^2+1}\,,\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

Nei poli semplici $z_\pm$ si hanno

$$\operatorname{Res}[g(z),z_\pm] = \frac{\pm 1}{4(z_+-z_-)}\,\frac{\pi\cos(z_\pm)}{\operatorname{sen}(z_\pm)} = \mp\frac{i}{4}\,\frac{\pi\cos(-\pi/2\pm i\pi/2)}{\operatorname{sen}(-\pi/2\pm i\pi/2)} = \mp\frac{i\pi}{4}\,\frac{\pm\operatorname{sen}(i\pi/2)}{-\cos(i\pi/2)} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)}\,,$$

i due residui hanno lo stesso valore

$$\operatorname{Res}[g(z),z_\pm] = -\frac{\pi}{4}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre, la serie può essere riscritta come

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2+1} &= \sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2j+1)^2+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2+1}\\ &= \{j=-k'-1\} = \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(2k'+1)^2+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2+1}\\ &= 2\mathcal{S}_2\,.\end{aligned}$$

Si ottiene l'equazione

$$0 = 2\mathcal{S}_2 - \frac{\pi}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

da cui la somma della seconda serie

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\pi}{4}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

La somma della serie completa è

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Quarto problema (punteggio massimo: 7/30)

Dopo aver verificato che la funzione

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi(x + j\Delta),$$

con $\Phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\Delta \in (0, \infty)$ è periodica con periodo Δ, si dimostri che, assumendo la convergenza uniforme della serie in $\mathbb{R}$, vale l'identità

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi(j\Delta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right),$$

dove $\tilde{\Phi}(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\Phi(x)$, cioè

$$\tilde{\Phi}(k) = \mathscr{F}_k\left[\Phi\right].$$

Curiosità. Il simbolo Φ rappresenta la lettera "y" dell'alfabeto kriptoniano.

Utilità. Potrebbe essere d'aiuto il sistema ortonormale delle fasi $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L^2(-\pi, \pi)$.

Soluzione del quarto problema

Per verificare la periodicità, valutiamo la funzione $f(x)$ in $x + N\Delta$, per un generico $N \in \mathbb{Z}$, si ha

$$f(x + N\Delta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi(x + N\Delta + j\Delta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi(x + (N + j)\Delta) = \{j' = N + j\} = \sum_{j'=-\infty}^{\infty} \Phi\left(x + j'\Delta\right) = f(x),$$

quindi la funzione è periodica con periodo Δ. Ciò implica che i valori che la funzione assume nell'intervallo $[-\Delta/2, \Delta/2]$ sono rappresentativi di quelli assunti in ogni $x \in \mathbb{R}$. Con il cambiamento di variabile $x' = x2\pi/\Delta$, l'intervallo rappresentativo si trasforma in $[-\pi, \pi]$, ne consegue che la funzione $f(x(x')) = f\left(x'\frac{\Delta}{2\pi}\right)$ può essere sviluppata rispetto al sistema ortonormale delle fasi, come suggerito e si ha

$$f\left(x'\frac{\Delta}{2\pi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{e^{inx'}}{\sqrt{2\pi}},$$

dove $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ è l'insieme dei coefficienti. L'n-esimo dei quali è dato dal prodotto scalare

$$f_n = \left(\frac{e^{inx'}}{\sqrt{2\pi}}, f\left(x'\frac{\Delta}{2\pi}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx'} f\left(x'\frac{\Delta}{2\pi}\right) dx'.$$

Tornando alla variabile x, ovvero con la sostituzione $x' = x2\pi/\Delta$ e usando la definizione della funzione $f(x)$ in termini della serie dei valori della funzione $\Phi(x)$, unitamente alla convergenza uniforme della stessa serie per estrarre la somma dall'integrale, si ha

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-inx\frac{2\pi}{\Delta}} f(x)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-inx\frac{2\pi}{\Delta}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Phi(x + j\Delta)\, dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-inx\frac{2\pi}{\Delta}} \Phi(x + j\Delta)\, dx, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nel j-esimo integrale, con $j \in \mathbb{Z}$, facciamo l'ulteriore cambiamento di variabile $y = x + \Delta j$, avremo

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-inx\frac{2\pi}{\Delta}} \Phi(x + j\Delta)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta(j-1/2)}^{\Delta(j+1/2)} e^{-in(y-\Delta j)\frac{2\pi}{\Delta}} \Phi(y)\, dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta(j-1/2)}^{\Delta(j+1/2)} e^{-iny\frac{2\pi}{\Delta}} \underbrace{e^{nj2i\pi}}_{=1} \Phi(y)\, dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta(j-1/2)}^{\Delta(j+1/2)} e^{-iny\frac{2\pi}{\Delta}} \Phi(y)\, dy, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

dove $e^{nj2i\pi} = 1$ poiché sia n, j e quindi anche il loro prodotto sono numeri relativi, cioè: $n, j, nj \in \mathbb{Z}$. Nell'ultimo termine della precedente espressione, a dipendere dall'indice di somma j è solo l'intervallo d'integrazione, possiamo sfruttare la linearità dell'integrale, ovvero scrivere la somma di integrali su intervalli disgiunti come l'integrale sull'unione degli stessi. Gli intervalli sono quelli dell'insieme $\{(\Delta(j-1/2), \Delta(j+1/2))\}_{j=-\infty}^{\infty}$, sono disgiunti e adiacenti. Infatti: $\forall\, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, tali che $j_1 \neq j_2$ si ha

$$(\Delta(j_1 - 1/2), \Delta(j_1 + 1/2)) \cap (\Delta(j_2 - 1/2), \Delta(j_2 + 1/2)) = \varnothing\,.$$

Inoltre, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$, l'unione del j-esimo con il $(j+1)$-esimo intervallo dà l'intervallo che ha come estremo inferiore l'estremo inferiore del j-esimo e come esterno superiore il superiore del $(j+1)$-esimo intervallo, ovvero

$$(\Delta(j-1/2), \Delta(j+1/2)] \cup (\Delta(j+1/2), \Delta(j+3/2)) = (\Delta(j-1/2), \Delta(j+3/2))\,.$$

Alla luce di queste considerazioni e delle proprietà della funzione integranda, la serie degli integrali coincide con l'integrale sull'unione degli intervalli che è l'intero asse reale, si ha cioè

$$f_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta(j-1/2)}^{\Delta(j+1/2)} e^{-iny\frac{2\pi}{\Delta}} \phi(y)\, dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iny\frac{2\pi}{\Delta}} \phi(y)\, dy\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

L'ultimo integrale è $\sqrt{2\pi}$-volte la trasformata di Fourier della funzione $\phi(x)$ in $k = n\frac{2\pi}{\Delta}$, quindi

$$f_n = \frac{2\pi}{\Delta} \tilde{\phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Con questa espressione dell'n-esimo coefficiente, l'espansione della funzione $f(x)$ diventa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{e^{inx\frac{2\pi}{\Delta}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right) \frac{e^{inx\frac{2\pi}{\Delta}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right) e^{inx\frac{2\pi}{\Delta}}\,.$$

Usando anche la definizione della funzione $f(x)$ come serie dei valori della funzione $\phi(x)$

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x + \Delta j) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right) e^{inx\frac{2\pi}{\Delta}}\,,$$

valutando l'ultima identità in $x = 0$, otteniamo e proviamo l'identità richiesta

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(\Delta j) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}\left(n\frac{2\pi}{\Delta}\right).$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si consideri l'operatore

$$\hat{\mathbb{X}} = \hat{I} - \alpha|a\rangle\langle a| - \beta|b\rangle\langle b|\,,$$

definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, con $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ e dove i vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono ortogonali e hanno norma unitaria, cioè

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0\,, \qquad \|a\| = \|b\| = 1\,.$$

Si determinino i valori di α e β affinché l'operatore sia un proiettore e si ottengano, nel caso generale, lo spettro discreto e gli autovettori dell'operatore. Infine, si ottenga l'espressione dell'operatore $\exp\left(\hat{\mathbb{X}}\right)$ come combinazione dell'operatore identità e degli operatori $|a\rangle\langle a|$ e $|b\rangle\langle b|$.

Curiosità. Il simbolo $\mathbb{X}$ rappresenta la lettera "x" dell'alfabeto kriptoniano.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L'operatore è un proiettore se è hermitiano e idempotente. L'hermitianità è conseguenza del fatto che l'operatore $\hat{\mathbb{O}}$ è somma di operatori hermitiani: l'operatore identità e gli operatori $-\alpha|a\rangle\langle a|$ e $-\beta|b\rangle\langle b|$. Questi ultimi sono hermitiani poiché i parametri α e β sono reali. Infatti si ha

$$\hat{\mathbb{O}}^{\dagger} = \left(\hat{I} - \alpha|a\rangle\langle a| - \beta|b\rangle\langle b|\right)^{\dagger} = \hat{I}^{\dagger} - \alpha^{*}\left(|a\rangle\langle a|\right)^{\dagger} - \beta^{*}\left(|b\rangle\langle b|\right)^{\dagger} = \hat{I} - \alpha|a\rangle\langle a| - \beta|b\rangle\langle b| = \hat{\mathbb{O}}\,.$$

Sarà la richiesta di idempotenza a vincolare i valori dei parametri. Il quadrato dell'operatore vale

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{O}}^{2} &= \left(\hat{I} - \alpha|a\rangle\langle a| - \beta|b\rangle\langle b|\right)\left(\hat{I} - \alpha|a\rangle\langle a| - \beta|b\rangle\langle b|\right) = \hat{I} - 2\alpha|a\rangle\langle a| - 2\beta|b\rangle\langle b| + \left(\alpha|a\rangle\langle a| + \beta|b\rangle\langle b|\right)^{2}\\ &= \hat{I} - 2\alpha|a\rangle\langle a| - 2\beta|b\rangle\langle b| + \alpha^{2}|a\rangle\langle a|a\rangle\langle a| + \beta^{2}|b\rangle\langle b|b\rangle\langle b|\\ &= \hat{I} - |a\rangle\langle a|\left(2\alpha - \alpha^{2}\right) - |b\rangle\langle b|\left(2\beta - \beta^{2}\right),\end{aligned}$$

coincide con l'operatore stesso se

$$2\alpha - \alpha^{2} = \alpha\,, \qquad 2\beta - \beta^{2} = \beta\,,$$

cioè

$$\alpha(\alpha - 1) = 0\,, \qquad \beta(\beta - 1) = 0\,,$$

le due equazioni devono essere soddisfatte simultaneamente, in quanto i due operatori di cui sono coefficienti $-\alpha$ e $-\beta$ sono ortogonali. Le uniche soluzioni ammesse nello spazio dei parametri sono $\alpha = \beta = 1$.
Consideriamo la base ortonormale $\mathscr{B} = \{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\} \subset E_3$ formata dai due vettori ortonormali $|a\rangle$ e $|b\rangle$ e dal vettore $|c\rangle$ di norma unitaria e ad essi ortogonale. Nello spazio di Hilbert a tre dimensioni $|c\rangle$ è definito in modo univoco a meno di una fase moltiplicativa. La matrice che rappresenta l'operatore $\hat{\mathbb{O}}$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ è diagonale. Infatti, l'elemento (k, j), $\forall\, k, j \in \{a, b, c\}$, si ottiene come valore di aspettazione $\langle k|\hat{\mathbb{O}}|j\rangle$, si ha

$$\hat{\mathbb{O}} \overset{\mathscr{B}}{\hookleftarrow} \mathbb{O} = \begin{pmatrix} \langle a|\hat{\mathbb{O}}|a\rangle & \langle a|\hat{\mathbb{O}}|b\rangle & \langle a|\hat{\mathbb{O}}|c\rangle \\ \langle b|\hat{\mathbb{O}}|a\rangle & \langle b|\hat{\mathbb{O}}|b\rangle & \langle b|\hat{\mathbb{O}}|c\rangle \\ \langle c|\hat{\mathbb{O}}|a\rangle & \langle c|\hat{\mathbb{O}}|b\rangle & \langle c|\hat{\mathbb{O}}|c\rangle \end{pmatrix},$$

le azioni dell'operatore $\hat{\mathbb{O}}$ sui tre vettori della base $\mathscr{B}$ sono

$$\hat{\mathbb{O}}|a\rangle = (1-\alpha)|a\rangle\,, \qquad \hat{\mathbb{O}}|b\rangle = (1-\beta)|b\rangle\,, \qquad \hat{\mathbb{O}}|c\rangle = |c\rangle\,,$$

(da cui si evince che i tre vettori della base sono autovettori) quindi la matrice è

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È diagonale, gli elementi della diagonale sono gli autovalori e i vettori della base $\mathscr{B}$ sono i corrispondenti autovettori dell'operatore $\hat{\mathbb{O}}$.
Per il teorema spettrale, l'operatore esponenziale $\exp\left(\hat{\mathbb{O}}\right)$, rispetto alla base $\mathscr{B}$, è rappresentato dalla matrice diagonale avente come elementi diagonali gli esponenziali degli omologhi della matrice $\mathbb{O}$, cioè

$$\exp\left(\hat{\mathbb{O}}\right) \overset{\mathscr{B}}{\hookleftarrow} \exp\left(\mathbb{O}\right) = \begin{pmatrix} e^{1-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{1-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere, come richiesto, l'espressione dell'operatore $\exp\left(\hat{\mathbb{O}}\right)$ come combinazione degli operatori: $\hat{I}$, $|a\rangle\langle a|$ e $|b\rangle\langle b|$, consideriamo le loro rappresentazioni matriciali rispetto alla base $\mathscr{B}$

$$\hat{I} \overset{\mathscr{B}}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |a\rangle\langle a| \overset{\mathscr{B}}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |b\rangle\langle b| \overset{\mathscr{B}}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e scriviamo la matrice che rappresenta l'operatore esponenziale in termini di queste. Abbiamo ottenuto

$$\exp\left(\Diamond\right) = e \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sommiamo e sottraiamo l'unità nei primi due elementi diagonali e scomponiamo opportunamente

$$\begin{aligned}\exp\left(\Diamond\right) &= e \begin{pmatrix} 1-1+e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1-1+e^{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1-1+e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1-1+e^{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(e^{-\alpha}-1\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(e^{-\beta}-1\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

In termini degli operatori si ha

$$\exp\left(\Diamond\right) = \underbrace{e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{\mathscr{B}}{\hookrightarrow} \hat{I}} + \left(e^{-\alpha+1}-e\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\mathscr{B}}{\hookrightarrow} |a\rangle\langle a|} + \left(e^{-\beta+1}-e\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\mathscr{B}}{\hookrightarrow} |b\rangle\langle b|},$$

da cui l'espressione richiesta

$$\exp\left(\hat{\Diamond}\right) = e\hat{I} + \left(e^{-\alpha+1}-e\right)|a\rangle\langle a| + \left(e^{-\beta+1}-e\right)|b\rangle\langle b|.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sia $\sigma = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\} \subset (0, \infty)$ lo spettro discreto dell'operatore hermitiano $\hat{\mathfrak{K}}$ definito nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N. Si determini il limite della successione vettoriale

$$\left\{ |s_k\rangle = \frac{\hat{\mathfrak{K}}|s_{k-1}\rangle}{\||s_{k-1}\|} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

i cui vettori si ottengono applicando iterativamente l'operatore $\hat{\mathfrak{K}}$ su un generico vettore $|s_0\rangle \in E_N \setminus \{|0\rangle\}$.

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{K}$ rappresenta la lettera "k" dell'alfabeto kriptoniano.

Soluzione del sesto Problema

L'operatore $\hat{\mathfrak{K}}$ è hermitiano e quindi normale, perciò ammette un insieme ortonormale di autovettori che indichiamo con $\left\{|t_j\rangle\right\}_{j=1}^{N}$, che è quindi una base dello spazio vettoriale E_N. Le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{\mathfrak{K}}|t_j\rangle = \tau_j |t_j\rangle, \qquad j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Scomponiamo il generico vettore $|s_0\rangle$ rispetto alla base degli autovettori, si ha

$$|s_0\rangle = s_0^j |t_j\rangle,$$

dove la j-esima componente si ottiene dal prodotto scalare $s_0^j = \langle t_j | s_0 \rangle$, $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Il primi tre vettori della successione e quindi il k-esimo, con $k \in \mathbb{N}$, sono

$$
\begin{aligned}
|s_1\rangle &= \frac{\hat{\mathcal{T}}|s_0\rangle}{\|s_0\|} = \frac{1}{\|s_0\|} s_0^j \hat{\mathcal{T}} |t_j\rangle = \frac{1}{\|s_0\|} s_0^j \tau_j |t_j\rangle = \frac{s_0^j \tau_j |t_j\rangle}{\sqrt{\sum_{l=1}^N \left|s_0^l\right|^2}} \\
|s_2\rangle &= \frac{\hat{\mathcal{T}}|s_1\rangle}{\|s_1\|} = \frac{s_0^j \tau_j^2 |t_j\rangle}{\sqrt{\sum_{l=1}^N \left|s_0^l\right|^2 \tau_l^2}} \\
|s_3\rangle &= \frac{\hat{\mathcal{T}}|s_2\rangle}{\|s_2\|} = \frac{s_0^j \tau_j^3 |t_j\rangle}{\sqrt{\sum_{l=1}^N \left|s_0^l\right|^2 \tau_l^4}} \\
\vdots\ &= \ \vdots \\
|s_k\rangle &= \frac{\hat{\mathcal{T}}|s_{k-1}\rangle}{\|s_{k-1}\|} = \frac{s_0^j \tau_j^k |t_j\rangle}{\sqrt{\sum_{l=1}^N \left|s_0^l\right|^2 \tau_l^{2(k-1)}}}\,.
\end{aligned}
$$

Riscriviamo l'espressione del k-esimo vettore della successione, mettendo in evidenza la k-esima potenza a numeratore e la $(k-1)$-esima a denominatore del maggiore tra gli autovalori relativi alle componenti non nulle del vettore $|s_0\rangle$. Definiamo questo autovalore come

$$
\tau_m = \max_{j \in \{1,2,\ldots,N\}} \left\{ \tau_j : s_0^j \neq 0 \right\},
$$

si ha

$$
|s_k\rangle = \frac{s_0^j \tau_j^k |t_j\rangle}{\sqrt{\sum_{l=1}^N \left|s_0^l\right|^2 \tau_l^{2(k-1)}}} = \frac{\tau_m^k}{\tau_m^{k-1}} \frac{s_0^m |t_m\rangle + \sum_{j\neq m}^N s_0^j \left(\tau_j/\tau_m\right)^k |t_j\rangle}{\sqrt{\left|s_0^m\right|^2 + \sum_{l\neq m}^N \left|s_0^l\right|^2 (\tau_l/\tau_m)^{2(k-1)}}} = \tau_m \frac{s_0^m |t_m\rangle + \sum_{j\neq m}^N s_0^j \left(\tau_j/\tau_m\right)^k |t_j\rangle}{\sqrt{\left|s_0^m\right|^2 + \sum_{l\neq m}^N \left|s_0^l\right|^2 (\tau_l/\tau_m)^{2(k-1)}}}\,.
$$

L'espressione così ottenuta è pronta per fare il limite $k \to \infty$, infatti le potenze k e $2(k-1)$ dei rapporti tra gli autovalori diversi dal maggiore e lo stesso autovalore maggiore, che compaiono, rispettivamente, a numeratore e denominatore tendono a zero. Si hanno cioè, $\forall\, j, l \in \{1, 2, 3, \ldots, m-1, m+1, \ldots, N\}$,

$$
0 < \frac{\tau_j}{\tau_m}, \frac{\tau_j}{\tau_m} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\tau_j}{\tau_m}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\tau_l}{\tau_m}\right)^{2(k-1)} = 0\,.
$$

Ne consegue che il limite della successione vale

$$
\lim_{k\to\infty} |s_k\rangle = \tau_m \lim_{k\to\infty} \frac{s_0^m |t_m\rangle + \sum_{j\neq m}^N s_0^j \left(\tau_j/\tau_m\right)^k |t_j\rangle}{\sqrt{\left|s_0^m\right|^2 + \sum_{l\neq m}^N \left|s_0^l\right|^2 (\tau_l/\tau_m)^{2(k-1)}}} = \tau_m \frac{s_0^m}{\left|s_0^m\right|} |t_m\rangle\,.
$$