

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA DEL 15 GENNAIO 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

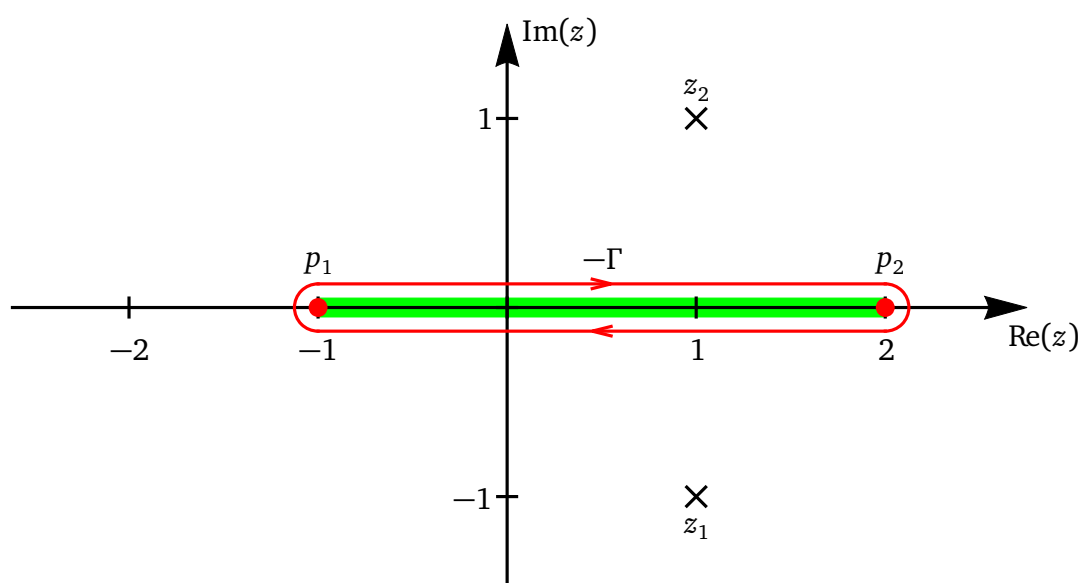
$$F = \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2} dx.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2}$$

è una funzione polidroma, i punti di diramazione al finito sono gli zeri del polinomio di secondo grado sotto radice, ovvero: $p_1 = -1$, $p_2 = 2$, indicati da dischi rossi nella figura. Possiede, inoltre, due poli semplici coincidenti con gli zeri semplici del polinomio di secondo grado che ne costituisce il denominatore e sono: $z_{1,2} = 1 \mp i$, indicati i simboli "x" nella figura.



La funzione integranda, estesa nel piano complesso z , può essere definita in modo tale che sviluppi la discontinuità,

che la caratterizza in quanto funzione polidroma, in coincidenza con il percorso d'integrazione. Ovvero il taglio può essere definito come il segmento reale che unisce i due punti di diramazione al finito p_1 e p_2 . Perciò è necessario definire in modo opportuno la fase del polinomio che compare sotto la radice. Consideriamo, innanzitutto, la fattorizzazione

$$\sqrt{2+z-z^2} = \sqrt{(z+1)(2-z)} = \sqrt{z+1}\sqrt{2-z},$$

affinché il taglio completo risulti coincidente con il segmento $[-1, 2]$, che rappresenta il percorso d'integrazione, ci sono solo due scelte possibili. Indicando con T_j il taglio che ha origine nel punto di diramazione p_j , con $j = 1, 2$, le scelte sono: $T_1 = [p_1, \infty)$ e $T_2 = [p_2, \infty)$; $T_1 = (-\infty, p_1]$ e $T_2 = (-\infty, p_2]$. Nel primo caso entrambi i tagli sono "in avanti", nel secondo sono, invece, "all'indietro". È immediato osservare che sia nella prima che nella seconda configurazione, lungo il segmento $[-1, 2]$ si estende uno solo dei due tagli, quello generato dal punto di diramazione p_1 , nel caso di tagli in avanti; quello generato da p_2 in quello di tagli all'indietro.

Consideriamo in dettaglio la prima configurazione con i tagli in avanti $T_1 = [p_1, \infty)$ e $T_2 = [p_2, \infty)$. In questo caso lungo la semiretta reale $(-\infty, p_1)$, non essendoci alcun taglio, la funzione integranda è analitica. Lo è anche lungo la semiretta reale (p_2, ∞) , infatti i due tagli che si estendono in questa regione, essendo di tipo radice quadrata, ovvero sono generati da punti di diramazione di ordine unitario, si "cancellano", cosicché anche lungo questa semiretta la funzione integranda risulta essere analitica.

Per la scelta delle fasi delle funzioni $(z+1)$ e $(2-z)$ si procede come segue.

Nel caso di $(z+1)$, al fine di avere il taglio e quindi la discontinuità in avanti si pone

$$z+1 = |z+1|e^{i\theta_1}, \quad \theta_1 \in (0, 2\pi).$$

Poiché la z compare con il segno più, nel piano complesso z la fase θ_1 della funzione $(z+1)$, non della z , descrive l'angolo formato dal vettore applicato in $p_1 = -1$ con estremo libero nel punto z , rispetto alla direzione positiva dell'asse reale. Ovvero $\theta_1 \rightarrow 0^+$ se z appartiene al bordo superiore del taglio $T_1 = (-1, \infty)$, compreso tra 0 e π se z appartiene al semipiano delle parti immaginarie positive, compreso tra π e 2π se z appartiene al semipiano delle parti immaginarie negative.

Nel caso di $(2-z)$, invece, al fine di avere il taglio e quindi la discontinuità in avanti si pone

$$2-z = |2-z|e^{i\theta_2}, \quad \theta_2 \in (-\pi, \pi).$$

Infatti, la z compare con il segno meno e, in questo caso, nel piano complesso z la fase θ_2 , descrive l'opposto, in quanto si invertono entrambi gli assi, dell'angolo formato dal vettore applicato in $p_2 = 2$ con estremo libero nel punto z , rispetto alla direzione negativa dell'asse reale. Ovvero, $\theta_2 \rightarrow -\pi^+$ se z appartiene al bordo superiore del taglio $T_2 = (2, \infty)$, compreso tra $-\pi$ e 0 se z appartiene al semipiano delle parti immaginarie positive, compreso tra 0 e π se z appartiene al semipiano delle parti immaginarie negative.

L'integrale sul percorso chiuso $-\Gamma$, orientato in senso orario e quindi negativo, mostrato in rosso nella figura a pagina 1, può essere calcolato con il teorema dei residui per cui si ha

$$\oint_{-\Gamma} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz = 2i\pi \left(\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty] \right),$$

d'altro canto, considerando i quattro contributi: due rettilinei, $C_{\pm} = \{z : z = x \pm i\epsilon, x \in [-1, 2]\}$, paralleli all'asse reale e appartenenti rispettivamente al semipiano delle parti immaginarie positive e negative, e gli archi, $\gamma_1 = \{z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$ e $\gamma_2 = \{z : z = 2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$, centrati nei punti di diramazione $p_1 = -1$ e $p_2 = 2$ di raggio ϵ , nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{-\Gamma} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{C_+} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz + \int_{C_-} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz + \int_{-\gamma_1} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz + \int_{-\gamma_2} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz \right) \\ &= \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2} e^{i(\theta_1+\theta_2)_+/2} dx - \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2} e^{i(\theta_1+\theta_2)_-/2} dx \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\gamma_1} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz + \int_{-\gamma_2} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz \right), \end{aligned}$$

dove con $(\theta_1 + \theta_2)_{\pm}$ si indica il valore limite della somma della fasi, rispettivamente, sopra e sotto il taglio. Come già discusso, i valori sono

$$(\theta_1 + \theta_2)_+ = 0 + 0 = 0, \quad (\theta_1 + \theta_2)_- = 2\pi + 0 = 2\pi,$$

per cui si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{-\Gamma} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz = 2 \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz \right).$$

Usando i lemmi per l'integrazione sugli archi, si dimostra, inoltre, che i limiti degli integrali su γ_1 e γ_2 sono nulli, ovvero che si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} (z-p_{1,2}) \stackrel{U}{=} 0,$$

rispettivamente per valori di $z \in \gamma_{1,2}$. Studiamo il modulo quadro della funzione relativa al primo dei due limiti, ovvero quello sull'arco γ_1 con $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$ e $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} (z+1) \right|^2 &= \left| \frac{\sqrt{(z+1)(2-z)}}{2-2z+z^2} \right|^2 \epsilon^2 = \frac{|2-z|}{|2-2z+z^2|^2} \\ &= \frac{|3-(z+1)|}{|z-z_1|^2 |z-z_2|^2} \leq \frac{3+\epsilon}{|z+1-(z_1+1)|^2 |z+1-(z_2+1)|^2} \epsilon^3 \\ &\leq \frac{3+\epsilon}{\underbrace{|z_1+1|}_{=\sqrt{5}} - \epsilon \underbrace{|z_2+1|}_{=\sqrt{5}} - \epsilon}^2 \epsilon^3 = \frac{3+\epsilon}{|\sqrt{5}-\epsilon|^4} \epsilon^3 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Nel caso del limite sull'arco γ_2 si ha $z = 2 + \epsilon e^{i\theta}$ e $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e il modulo quadro della funzione vale

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} (z-2) \right|^2 &= \left| \frac{\sqrt{(z+1)(2-z)}}{2-2z+z^2} \right|^2 \epsilon^2 = \frac{|z+1|}{|2-2z+z^2|^2} \\ &= \frac{|z-2+3|}{|z-z_1|^2 |z-z_2|^2} \leq \frac{\epsilon+3}{|z-2-(z_1-2)|^2 |z-2-(z_2-2)|^2} \epsilon^3 \\ &\leq \frac{3-\epsilon}{\underbrace{|z_1-2|}_{=\sqrt{2}} - \epsilon \underbrace{|z_2-2|}_{=\sqrt{2}} - \epsilon}^2 \epsilon^3 = \frac{\epsilon+3}{|\sqrt{2}-\epsilon|^4} \epsilon^3 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Alla luce dei due risultati precedenti, si ha la validità dei limiti uniformi e quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{1,2}} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz = 0.$$

Ne consegue che l'integrale sul percorso chiuso $-\Gamma$ coincide con il doppio dell'integrale cercato, cioè

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{-\Gamma} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{2-2z+z^2} dz = 2 \int_{-1}^2 \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{2-2x+x^2} dx = 2F,$$

quindi, usando l'espressione dello stesso integrale come somma dei residui, si ottiene

$$F = i\pi \left(\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty] \right).$$

I residui al finito, relativi ai poli semplici, sono

$$\text{Res}[f(z), z_{1,2}] = \lim_{z \rightarrow z_{1,2}} f(z)(z-z_{1,2}) = \pm \frac{\sqrt{2+z_{1,2}-z_{1,2}^2}}{z_1-z_2} = \mp \frac{\sqrt{(z_{1,2}+1)(2-z_{1,2})}}{2i}.$$

I valori numerici si ottengono usando coerentemente la definizione delle fasi dei binomi sotto radice. Per il primo binomio si ha

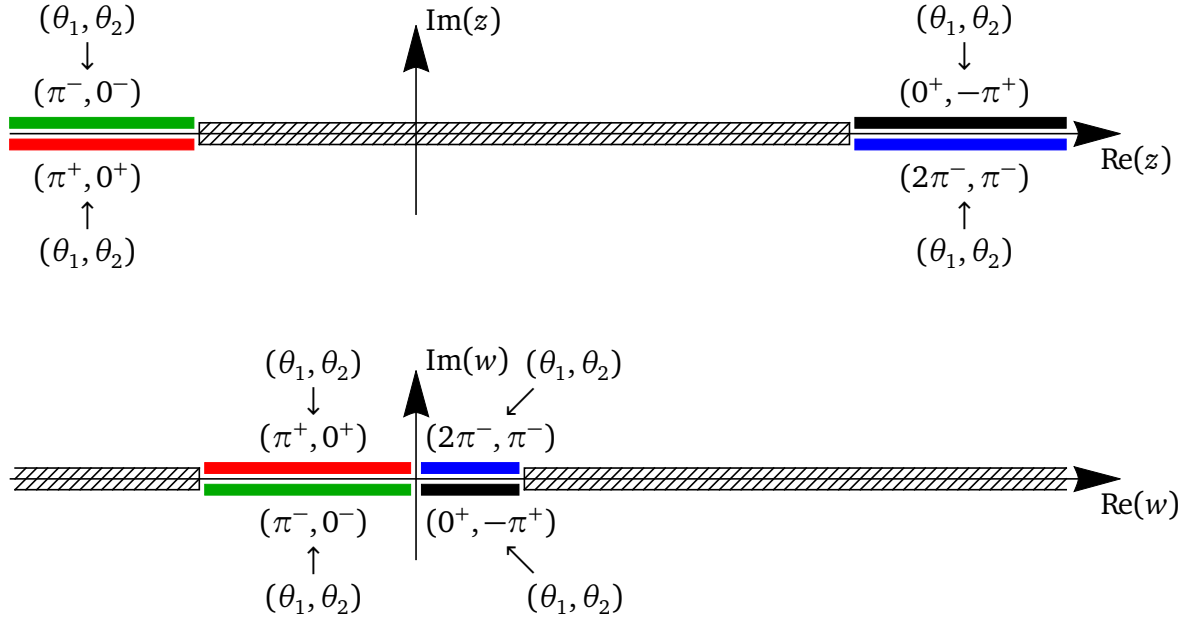
$$z_1 + 1 = 2 - i = |2 - i| e^{i(2\pi - \alpha)} = \sqrt{5} e^{i(2\pi - \alpha)}, \quad z_2 + 1 = 2 + i = |2 + i| e^{i\alpha} = \sqrt{5} e^{i\alpha},$$

con $\alpha = \arctan(2) \in (0, \pi/2)$ e per il secondo

$$2 - z_1 = 1 + i = |1 + i|e^{i\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad 2 - z_2 = 1 - i = |1 - i|e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Usando questi risultati si hanno i residui al finito

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z_1] &= -\frac{10^{1/4}e^{i\pi}e^{i(\pi/8-\alpha/2)}}{2i} = \frac{10^{1/4}e^{i(\pi/8-\alpha/2)}}{2i} = -i\frac{10^{1/4}e^{i(\pi/8-\alpha/2)}}{2}, \\ \text{Res}[f(z), z_2] &= \frac{10^{1/4}e^{-i(\pi/8-\alpha/2)}}{2i} = -i\frac{10^{1/4}e^{-i(\pi/8-\alpha/2)}}{2}. \end{aligned}$$



Il residuo all'infinito si ottiene come segue,

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), \infty] &= -\text{Res}\left[\frac{f(1/w)}{w^2}, 0\right] = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=\rho} \frac{\sqrt{2+1/w-1/w^2}}{2-2/w+1/w^2} \frac{dw}{w^2} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=\rho} \frac{\sqrt{|1/w+1||2-1/w|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}{2w^2-2w+1} dw \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=\rho} \frac{\sqrt{|w+1||2w-1|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}{2w^2-2w+1} \frac{dw}{|w|}, \end{aligned}$$

con $\rho \in (0, 1)$ e dove, θ_1 e θ_2 , come nella trattazione precedente, rappresentano le fasi dei binomi $(z+1) = (1/w+1)$ e $(2-z) = (2-1/w)$, in termini dei quali si è fattorizzato il polinomio di secondo grado in z che compare sotto radice. In particolare, nella seconda riga è stata usata la fattorizzazione

$$2 + 1/w - 1/w^2 = (1/w + 1)(2 - 1/w) = |1/w + 1||2 - 1/w|e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

in base alla quale la radice quadrata nella terza riga è stata posta nella forma

$$\sqrt{2 + 1/w - 1/w^2} = \sqrt{|1/w + 1||2 - 1/w|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{|w + 1||2w - 1|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \frac{1}{|w|}.$$

L'integranda ha un polo semplice nell'origine, quindi il residuo vale

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|w + 1||2w - 1|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}{2w^2 - 2w + 1} \frac{w}{|w|}.$$

Al fine di stabilire i valori delle fasi, calcoliamo i limiti lungo i bordi superiore e inferiore del semiasse reale positivo, ovvero, nei casi in cui w tende a zero per valori reali positivi e le fasi sono rispettivamente $(\theta_1, \theta_2) = (2\pi, \pi)$ e $(\theta_1, \theta_2) = (0, -\pi)$, come mostrato nella figura a pagina 4. Riferendosi alla figura a pagina 4, questi risultati si ottengono osservando come le quattro "regioni" di fase lungo i bordi dell'asse reale non interessati dal taglio, indicate dai quattro rettangoli colorati, si trasformano passando dal piano complesso z a quello $w = 1/z$. Ovviamente l'inversione della variabile implica la trasformazione "sopra-sotto", ovvero il cambiamento di segno della parte immaginaria. Per cui, ad esempio, la regione di fase blu, che nel piano complesso z si trova nel quarto quadrante, cioè lungo il bordo inferiore della semiretta reale e positiva che ha origine in $z = 2$, corrispondente ai valori $(\theta_1, \theta_2) = (2\pi^-, \pi^-)$, nel piano complesso $w = 1/z$ viene trasformata nella regione finita, che si trova nel primo quadrante, sul bordo superiore del semiasse reale compreso tra l'origine, corrispondente a $z \rightarrow \infty$, e $w = 1/2$, che corrisponde invece a $z = 2$. Lo stesso ragionamento si applica alle altre tre regioni di fase.

Entrambi i limiti, ovvero quelli lungo le regioni di fase blu e nera, con riferimento alla figura a pagina 4, in quanto il limite esiste, danno lo stesso valore, infatti, sul bordo superiore, cioè con $(\theta_1, \theta_2) = (2\pi^-, \pi^-)$, si ha

$$\text{Res}[f(z), \infty] = - \lim_{w \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{|w+1||2w-1|}}{2w^2-2w+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{w}{|w|}}_{\rightarrow 1} \underbrace{e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}_{=e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i} = i,$$

sul bordo inferiore, dove invece $(\theta_1, \theta_2) = (0, -\pi^-)$,

$$\text{Res}[f(z), \infty] = - \lim_{w \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{|w+1||2w-1|}}{2w^2-2w+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{w}{|w|}}_{\rightarrow 1} \underbrace{e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}_{=e^{-\frac{i\pi}{2}}=-i} = i.$$

Ovviamente lo stesso valore deve essere ottenuto anche lungo il semiasse reale negativo, così come lungo ogni altro percorso. In particolare, potendo fissare le fasi come mostrato nella figura a pagina 4, lungo i bordi superiore e inferiore del semiasse reale negativo, regioni di fase rossa e verde, si hanno, rispettivamente, le fasi $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$ e $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$. I limiti, quindi coincidono, e il valore comune è lo stesso dei precedenti, infatti

$$\text{Res}[f(z), \infty] = - \lim_{w \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{\sqrt{|w+1||2w-1|}}{2w^2-2w+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{w}{|w|}}_{\rightarrow -1} \underbrace{e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}_{\rightarrow e^{\frac{i\pi}{2}}=i} = i.$$

Usando i valori dei tre residui si ottiene, infine, l'integrale cercato, che vale

$$\begin{aligned} F &= i\pi \left(\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty] \right) \\ &= i\pi \left(-i \frac{10^{1/4} e^{i(\pi/8-\alpha/2)}}{2} - i \frac{10^{1/4} e^{-i(\pi/8-\alpha/2)}}{2} + i \right) \\ &= \pi \left(10^{1/4} \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Manipoliamo la funzione coseno al fine rendere più esplicita la soluzione e cioè di scriverla in termini di sole quantità numeriche, in particolare vorremo renderla indipendente dal parametro $\alpha = \arctan(2)$. Considerassimo, innanzitutto la formula di bisezione $\cos(\theta) = \pm \sqrt{\cos(2\theta) + 1}$, da cui

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 1} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\sqrt{2}} + 1}.$$

Abbiamo selezionato solo il segno positivo perché, α come arcotangente di 2 verifica la condizione $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, da cui segue $-\pi/8 < \pi/8 - \alpha/2 < 0$, e quindi: $\cos(\pi/8 - \alpha/2) > 0$. Inoltre, usando le espressioni delle funzioni coseno e seno in termini della funzione tangente,

$$\cos(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta) + 1}}, \quad \sin(\theta) = \pm \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{\tan^2(\theta) + 1}},$$

si hanno i valori numerici

$$\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\alpha) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{\tan^2(\alpha) + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

dove, anche in questi casi, si sono selezionati solo i segni positivi poiché, in quanto l'angolo α si trova nel primo quadrante, $\cos(\alpha) > 0$ e $\sin(\alpha) > 0$.
In definitiva

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}} + 1} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{10}}}{10^{1/4}\sqrt{2}},$$

da cui

$$F = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3 + \sqrt{10}} - \sqrt{2} \right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga, in funzione di $n \in \mathbb{N}$, l'integrale in valore principale

$$P_n = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n+1} + 1}.$$

Suggerimento. Potrebbe essere di non poco aiuto la constatazione della realtà del risultato.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, possiede $2n+1$ poli semplici al finito, coincidenti con le $2n+1$ radici $(2n+1)$ -esime di -1 , sono quindi gli elementi dell'insieme $\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/(2n+1)}\}_{k=0}^{2n}$. Solo uno dei poli è reale, l' n -esimo $z_n = -1$, ed è rispetto a questo che va considerato il valore principale. Fattorizziamo il polinomio a denominatore dell'integranda, isolando il polo reale

$$P_n = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \prod_{k \neq n} (x - z_k)}.$$

Usiamo la formula di Sokhotsky-Plemelj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \mp i\pi f(x_0),$$

con $x_0 = -1$ e

$$f(x) = \frac{1}{\prod_{k \neq n} (x - z_k)},$$

e considerando solo il segno "alto", ovvero "spostando" il polo semplice nel semipiano delle parti immaginarie negative, $-1 \rightarrow -1 - i\epsilon$, con $\epsilon \rightarrow 0^+$. Ne consegue che l'integrale in valore principale assume la forma

$$P_n = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \prod_{k \neq n} (x - z_k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1+i\epsilon) \prod_{k \neq n} (x - z_k)} + i\pi \frac{1}{\prod_{k \neq n} (-1 - z_k)}.$$

L'integranda dell'integrale a secondo membro non ha singolarità lungo il percorso d'integrazione, l'integrale può essere calcolato usando il lemma di Jordan e, poiché la funzione integranda tende uniformemente a zero in tutte le direzioni, la scelta della semicirconferenza superiore o inferiore (con, rispettivamente, $\text{Im}(z) > 0$ o $\text{Im}(z) < 0$), con cui chiudere il percorso è libera. Scegliamo quella superiore, in questo modo il valore dell'integrale non in valore principale dell'ultimo membro si ottiene sommando i residui con parte immaginaria positiva e si ha

$$\begin{aligned} P_n &= \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \prod_{k \neq n} (x - z_k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1+i\epsilon) \prod_{k \neq n} (x - z_k)} + i\pi \frac{1}{\prod_{k \neq n} (-1 - z_k)} \\ &= 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}[z_k] + i\pi \text{Res}[z_n = -1] = 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}[z_k] + \frac{\text{Res}[z_n = -1]}{2} \right), \end{aligned}$$

dove, anche il fattore di $i\pi$ nell'ultimo membro della prima espressione è stato scritto in forma di residuo in $z_n = -1$. Avendo $z_k^{2n+1} = -1$, per ogni $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$

$$\text{Res}[z_k] = \frac{1}{(2n+1)z_k^{2n}} = \frac{z_k}{(2n+1)z_k^{2n+1}} = -\frac{z_k}{(2n+1)},$$

allora, sfruttando anche la realtà del risultato, cioè $P_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}[z_k] + \frac{\text{Res}[z_n = -1]}{2} \right) = \frac{-2i\pi}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k - \frac{1}{2} \right) = \text{Re} \left[\frac{-2i\pi}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(z_k),$$

da cui

$$P_n = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sen} \left(\frac{2k+1}{2n+1} \pi \right).$$

È possibile anche ottenere il risultato "sommato", partendo dall'espressione

$$P_n = 2\pi \text{Re} \left[i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}[z_k] + \frac{\text{Res}[z_n = -1]}{2} \right) \right] = -2\pi \text{Im} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}[z_k] + \frac{\text{Res}[z_n = -1]}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{2n+1} \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k \right),$$

l'ultima identità è stata ottenuta usando la realtà del residuo in $z_n = -1$, che infatti vale $1/(2n+1)$, e l'espressione precedentemente ottenuta per il residuo k -esimo. Calcoliamo la somma dei primi n poli,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} z_k &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\pi/(2n+1)} = e^{i\pi/(2n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2i\pi/(2n+1)})^k = e^{i\pi/(2n+1)} \frac{1 - e^{2in\pi/(2n+1)}}{1 - e^{2i\pi/(2n+1)}} \\ &= e^{i\pi/(2n+1)} \frac{1 - e^{-i\pi/(2n+1)} e^{i\pi(2n+1)/(2n+1)}}{1 - e^{2i\pi/(2n+1)}} = e^{i\pi/(2n+1)} \frac{1 + e^{-i\pi/(2n+1)}}{1 - e^{2i\pi/(2n+1)}} = \frac{1 + e^{-i\pi/(2n+1)}}{e^{-i\pi/(2n+1)} - e^{i\pi/(2n+1)}} \\ &= \frac{1 + \cos(\pi/(2n+1)) - i \text{sen}(\pi/(2n+1))}{-2i \text{sen}(\pi/(2n+1))} = \frac{\text{sen}(\pi/(2n+1)) + i[1 + \cos(\pi/(2n+1))]}{2 \text{sen}(\pi/(2n+1))}, \end{aligned}$$

sostituiamo questo risultato nell'espressione precedente di P_n , si ha

$$P_n = \frac{2\pi}{2n+1} \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k \right) = \frac{\pi}{2n+1} \text{Im} \left(\frac{\text{sen}(\pi/(2n+1)) + i[1 + \cos(\pi/(2n+1))]}{\text{sen}(\pi/(2n+1))} \right),$$

ovvero

$$P_n = \frac{\pi}{2n+1} \frac{1 + \cos(\pi/(2n+1))}{\text{sen}(\pi/(2n+1))}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^7 + 1},$$

centrato in $z = -1$ e convergente nell'origine.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

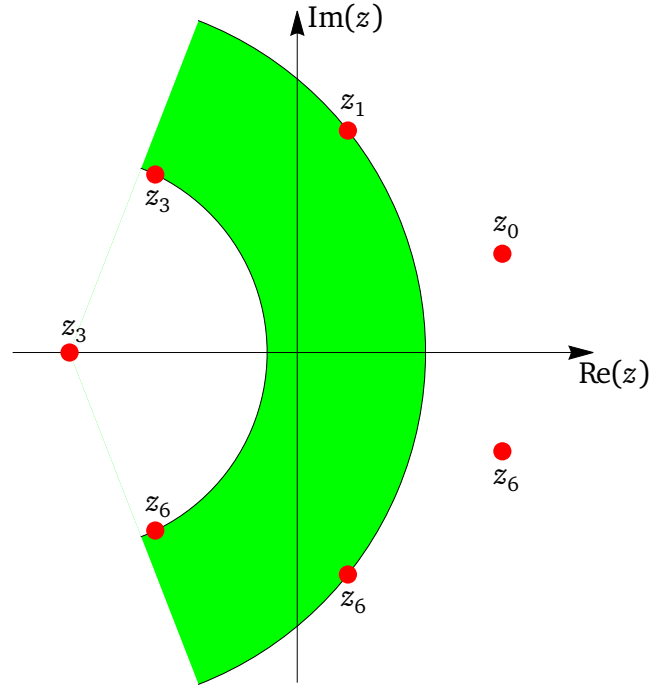
La funzione è meromorfa e possiede sette poli semplici posizionati nei punti coincidenti con le sette radici settimesime di $z = -1$, l'insieme dei poli è $\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/7}\}_{k=0}^6$. I poli sono rappresentati come dischi rossi nella figura a pagina 8. Con centro nel polo $z_3 = -1$ si possono definire quattro serie di Laurent, ovvero quelle convergenti nelle quattro corone circolari

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z : 0 < |z+1| < |z_2+1|\}, \\ C_2 &= \{z : |z_2+1| < |z+1| < |z_1+1|\}, \\ C_3 &= \{z : |z_1+1| < |z+1| < |z_0+1|\}, \\ C_4 &= \{z : |z_0+1| < |z+1|\}. \end{aligned}$$

L'origine si trova a una distanza unitaria dal centro della serie $z = -1$, ne consegue che la serie di Laurent da ottenere sia quella convergente nella corona circolare con raggi minore e maggiore, r_1 e r_2 , tali che $r_1 < 1 < r_2$. Poiché i tre raggi sono

$$|z_k + 1| = \sqrt{2[1 + \cos((2k+1)\pi/7)]}, \quad k = 0, 1, 2,$$

l'intervallo $[|z_k + 1|, |z_{k-1} + 1|]$ che contiene l'unità è quello con $k = 2$, quindi la corona circolare contenente l'origine è C_2 , una sua porzione è evidenziata in verde nella figura.



Infatti

$$\begin{aligned} C_2 &= \{z : |z_2 + 1| < |z + 1| < |z_1 + 1|\} = \left\{z : \sqrt{2[1 + \cos(5\pi/7)]} < |z + 1| < \sqrt{2[1 + \cos(3\pi/7)]}\right\} \\ &= \left\{z : \sqrt{2[1 + \cos(5\pi/7)]} < 0,9 < |z + 1| < 1,5 < \sqrt{2[1 + \cos(3\pi/7)]}\right\}, \end{aligned}$$

da cui $z = 0 \in C_2$.

Usiamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, che, con un numero finito di poli semplici, ha la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^6 \frac{R_k}{z - z_k},$$

R_k rappresenta il residuo del k -esimo polo,

$$R_k = \text{Res} \left[\frac{1}{z^7 + 1}, z_k \right] = \frac{1}{7z_k^6} = \frac{z_k}{7z_k^7} = -\frac{z_k}{7},$$

dove si è utilizzata l'identità $z_k^7 = -1$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Sommando e sottraendo l'unità a denominatore si ha

$$f(z) = -\frac{1}{7} \sum_{k=0}^6 \frac{z_k}{z + 1 - (z_k + 1)}.$$

Inoltre, $\forall z \in C_2$ valgono le seguenti limitazioni

$$|z_2 + 1| = |z_4 + 1| < |z + 1| < |z_1 + 1| = |z_5 + 1| < |z_0 + 1| = |z_6 + 1|,$$

da cui si hanno

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+1}{z_k+1} \right| &< 1 && \text{per } k = 0, 1, 5, 6, \\ \left| \frac{z+1}{z_k+1} \right| > 1 &\Rightarrow \left| \frac{z_k+1}{z+1} \right| < 1 && \text{per } k = 2, 4. \end{aligned}$$

Alla luce di questi risultati, possiamo sfruttare per ciascun termine dell'espressione di Mittag-Leffler la somma di una opportuna serie geometrica. Escludendo il termine con il polo in $z_3 = -1$, che è già nella forma corretta, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{7} \left(\frac{-1}{z+1} - \sum_{k=0,1,5,6} \frac{z_k}{z_k+1} \frac{1}{1-(z+1)/(z_k+1)} + \sum_{k=2,4} \frac{z_k}{z+1} \frac{1}{1-(z_k+1)/(z+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{7} \left(\frac{-1}{z+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0,1,5,6} \frac{z_k}{(z_k+1)^{j+1}} (z+1)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2,4} \frac{z_k}{(z_k+1)^{-j}} (z+1)^{-j-1} \right) \\ &= -\frac{1}{7} \left(\frac{-1}{z+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0,1,5,6} \frac{z_k}{(z_k+1)^{j+1}} (z+1)^j + \sum_{l=-\infty}^{-1} \sum_{k=2,4} \frac{z_k}{(z_k+1)^{l+1}} (z+1)^l \right) \\ &= -\frac{1}{7} \left(\frac{1}{z+1} (-1+z_2+z_4) - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0,1,5,6} \frac{z_k}{(z_k+1)^{j+1}} (z+1)^j + \sum_{l=-\infty}^{-2} \sum_{k=2,4} \frac{z_k}{(z_k+1)^{l+1}} (z+1)^l \right) \\ &= \frac{1}{z+1} \frac{1-z_2-z_4}{7} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0,1,5,6} \frac{z_k}{7(z_k+1)^{j+1}} (z+1)^j - \sum_{l=-\infty}^{-2} \sum_{k=2,4} \frac{z_k}{7(z_k+1)^{l+1}} (z+1)^l \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} C_h (z+1)^h, \end{aligned}$$

nell'ultima somma della terza riga si è fatto il cambiamento di indice $l = -j-1$, nella quarta riga i termini in $(z+1)^{-1}$ sono stati raccolti e, infine, abbiamo considerato la forma generale della serie di Laurent, così da identificare i singoli coefficienti. Questi si ottengono come somme di due, tre solo nel caso di C_{-1} , e quattro termini, in particolare si hanno

$$\begin{cases} C_h = -\frac{1}{7} \sum_{j=2,4} \frac{z_j}{(z_j+1)^{h+1}}, & -h-1 \in \mathbb{N} \\ C_{-1} = \frac{1-z_2-z_4}{7}, \\ C_h = \frac{1}{7} \sum_{j=0,1,5,6} \frac{z_j}{(z_j+1)^{h+1}}, & h-1 \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che data una generica matrice regolare M , $N \times N$ ad elementi complessi, esistono sempre due matrici unitarie $N \times N$, U e V , tali che

$$M = UM_dV^\dagger,$$

con M_d diagonale e con elementi reali non negativi, cioè

$$M_d = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N),$$

con $\mu_j \geq 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Si determinino le matrici unitarie nel caso in cui si abbia

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento. Si noti che la matrice MM^\dagger è sempre hermitiana e con autovalori non negativi.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La matrice MM^\dagger è hermitiana, quindi è normale e ammette un insieme ortonormale di autovettori, indichiamo con $\{v_k\}_{k=1}^N$ e $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$, rispettivamente, l'insieme degli autovettori e quello degli autovalori corrispondenti. Si hanno di conseguenza le N equazioni agli autovalori

$$MM^\dagger v_k = \lambda_k v_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Poiché, come detto, gli autovettori sono elementi di un insieme ortonormale, essi rappresentano anche una base ortonormale, rispetto alla quale la matrice MM^\dagger ha rappresentazione diagonale. Gli elementi della diagonale sono gli stessi autovalori, in particolare, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\lambda_k = v_k^\dagger MM^\dagger v_k = (M^\dagger v_k)^\dagger (M^\dagger v_k) = \|M^\dagger v_k\|^2 \geq 0,$$

l'ultima identità segue dalla definizione di norma indotta dal prodotto scalare. Dalla precedente segue che se la matrice MM^\dagger avesse l'autovalore nullo $\lambda_k = 0$, con autovettore v_k , allora il vettore $M^\dagger v_k$ sarebbe il vettore nullo, il che equivale ad affermare che v_k è autovettore anche di M^\dagger relativo allo stesso autovalore nullo. È banale verificare che, partendo, invece, dall'ipotesi che v_k sia l'autovettore di M^\dagger relativo all'autovalore nullo, ovvero che si abbia l'equazione agli autovalori

$$M^\dagger v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_k,$$

lo sarà parimenti anche per MM^\dagger , ovvero

$$MM^\dagger v_k = M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_k.$$

I definitiva, la matrice MM^\dagger ha autovalore nullo, se e solo la matrice M^\dagger ha autovalore nullo e inoltre hanno lo stesso autovettore. Poiché la presenza o meno dell'autovalore nullo equivale rispettivamente alla non invertibilità e invertibilità della matrice, il fatto che M^\dagger sia invertibile implica che il suo spettro discreto e quindi anche quello della matrice MM^\dagger non contengano l'autovalore nullo. Segue che la precedente disuguaglianza diventa stretta, ovvero tutti gli autovalori di MM^\dagger , elementi dell'insieme $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$, sono reali strettamente positivi.

Essendo una matrice normale, MM^\dagger sarà diagonalizzabile con una matrice unitaria W , ovvero, indicando con $(MM^\dagger)_d$ la rappresentazione diagonale di MM^\dagger , si ha

$$\begin{aligned} MM^\dagger &= W(MM^\dagger)_d W^\dagger = W \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) W^\dagger \\ &= W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) W^\dagger \\ &= W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})^\dagger W^\dagger, \end{aligned}$$

dove si è posto $(MM^\dagger)_d = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$ e, poiché gli autovalori sono reali strettamente positivi, tali sono anche le loro radici quadrate, per cui la matrice radice quadrata $((MM^\dagger)_d)^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$ è reale.

Dell'identità precedente è possibile ottenere la matrice M moltiplicando ambo i membri per $(M^\dagger)^{-1}$, cioè per l'inversa della matrice aggiunta, che coincide con l'aggiunta dell'inversa, la cui esistenza è garantita dall'invertibilità della stessa matrice M , si ha

$$\begin{aligned} M &= W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})^\dagger W^\dagger (M^\dagger)^{-1} \\ &= W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) (M^{-1} W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}))^\dagger \\ &= W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) Y^\dagger, \end{aligned} \tag{1}$$

con $Y = M^{-1}W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$.
Dimostriamo che la matrice Y è unitaria

$$\begin{aligned} YY^\dagger &= M^{-1}W \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N})}_{MM^\dagger} W^\dagger (M^{-1})^\dagger \\ &= M^{-1}MM^\dagger (M^{-1})^\dagger = I, \end{aligned}$$

e ancora

$$\begin{aligned} Y^\dagger Y &= \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) W^\dagger (M^{-1})^\dagger M^{-1}W \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \\ &= \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) \underbrace{W^\dagger (MM^\dagger)^{-1} W}_{\text{diag}(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_N)} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_N}) = I. \end{aligned}$$

Un metodo più semplice per ottenere la matrice Y senza dover calcolare l'inversa della matrice M consiste nello sfruttare la sua unitarietà, ovvero il fatto che la sua aggiunta coincida con l'inversa,

$$Y^\dagger = Y^{-1} = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_N}) W^\dagger M,$$

quindi per ottenere la matrice U sarà sufficiente conoscere lo spettro discreto e gli autovettori della matrice MM^\dagger . Infatti, con gli autovalori si definisce la matrice diagonale $\text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_N})$, con gli autovettori ortonormali si costruisce la matrice diagonalizzante W e quindi la sua aggiunta, queste matrici, unitamente alla matrice nota M permettono di calcolare l'aggiunta della matrice Y , da cui, eseguendo la coniugazione hermitiana si ottiene la matrice Y cercata.

Infine, ponendo: $U = W$, $V = Y$ e $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, dall'identità dell'Eq. (1) si ottiene la relazione cercata

$$M = U \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) V^\dagger.$$

Considerando la matrice data M , si ha

$$MM^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori, soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(MM^\dagger - I\lambda) &= 0 \\ (1 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 36) &= 0, \end{aligned}$$

sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 12.$$

Gli autovettori si ottengono dalle equazioni agli autovalori, indicando x^j , y^j e z^j le componenti contro-varianti del j -esimo autovettore non normalizzato, con $j = 1, 2, 3$, si ha

$$\begin{aligned} MM^\dagger v_j &= \lambda_j v_j \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^j \\ y^j \\ z^j \end{pmatrix} &= \lambda_j \begin{pmatrix} x^j \\ y^j \\ z^j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

posto $x^1 = x^2 = x^3 = 1$, usiamo la prima e la seconda equazione per ricavare le altre componenti. Si hanno i sistemi

$$\begin{cases} 3y^j + 4z^j = \lambda_j - 5 \\ (6 - \lambda_j)y^j + 3z^j = -3 \end{cases},$$

da cui

$$y^j = \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_j - 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 - \lambda_j & 3 \end{pmatrix}} = \frac{3\lambda_j - 3}{4\lambda_j - 15} = \begin{cases} 0 & j = 1 \\ -2 & j = 2 \\ 1 & j = 3 \end{cases},$$

$$z^j = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & \lambda_j - 5 \\ 6 - \lambda_j & -3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 - \lambda_j & 3 \end{pmatrix}} = \frac{\lambda_j^2 - 11\lambda_j + 21}{4\lambda_j - 15} = \begin{cases} -1 & j = 1 \\ 1 & j = 2 \\ 1 & j = 3 \end{cases},$$

considerando le normalizzazioni i tre autovettori sono

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante, che è la prima delle due richieste, è la U ed ha elementi $W_j^k = v_{(j)}^k$, con $k, j = 1, 2, 3$. Ovvero l'elemento della k -esima riga e j -esima colonna coincide con la k -esima componente contro-variante del j -esimo autovettore, con $k, j = 1, 2, 3$, quindi

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La seconda matrice unitaria è

$$\begin{aligned} V &= \left(\text{diag} \left(1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, 1/\sqrt{\lambda_3} \right) U^\dagger M \right)^\dagger \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^\dagger \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/(3\sqrt{2}) & -2/(3\sqrt{2}) & 1/(3\sqrt{2}) \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/(3\sqrt{2}) & -4/(3\sqrt{2}) & 1/(3\sqrt{2}) \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \\ 0 & -4/(3\sqrt{2}) & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La funzione $f(x)$ può essere posta in forma di derivata, infatti si ha

$$f(x) = -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x^4}.$$

Ne consegue che possiamo calcolare la sua trasformata di Fourier come

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = ik \mathcal{F}_k \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{1+x^4} \right] = -\frac{ik}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^4+1} dx.$$

Applichiamo il lemma di Jordan, considerando i due casi relativi alla positività e negatività di k . La funzione integranda ha quattro poli semplici nella altrettante radici quarte di -1 , ovvero i poli sono gli elementi dell'insieme $\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/4}\}_{k=0}^3$. Applicando il teorema dei residui si ha

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{k\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \begin{cases} \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_0 \right] + \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_1 \right] & k < 0 \\ -\text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_2 \right] - \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_3 \right] & k > 0 \end{cases}.$$

I residui sono

$$\text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_k \right] = \frac{e^{-ikz_k}}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4} e^{-ikz_k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

per le due somme che compaiono nella definizione della trasformata di Fourier si hanno

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_0 \right] + \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_1 \right] &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(1+i)e^{-ik/\sqrt{2}+k/\sqrt{2}} + (-1+i)e^{ik/\sqrt{2}+k/\sqrt{2}} \right] \\ &= -\frac{e^{k/\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \left[(1+i)e^{-ik/\sqrt{2}} + (-1+i)e^{ik/\sqrt{2}} \right] \\ &= i \frac{e^{k/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\sin(k/\sqrt{2}) - \cos(k/\sqrt{2}) \right); \\ -\text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_2 \right] - \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^4+1}, z_3 \right] &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[(-1-i)e^{ik/\sqrt{2}-k/\sqrt{2}} + (1-i)e^{-ik/\sqrt{2}-k/\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{e^{-k/\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \left[(-1-i)e^{ik/\sqrt{2}} + (1-i)e^{-ik/\sqrt{2}} \right] \\ &= i \frac{e^{-k/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(-\sin(k/\sqrt{2}) - \cos(k/\sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

Ne consegue che la trasformata di Fourier completa può essere scritta in funzione del modulo di $|k|$ con una legge unica, ovvero

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{ik\sqrt{\pi}e^{-|k|/\sqrt{2}}}{8} \left(-\sin(|k|/\sqrt{2}) - \cos(k/\sqrt{2}) \right).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \int_1^{\infty} \frac{\delta(\sin(x))}{x^2} dx.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

In generale si ha

$$\int_E \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_{j=1}^N \frac{f(x_j)}{|g'(x_j)|},$$

dove E è l'intervallo o l'unione degli intervalli di integrazione e $\{x_j\}_{j=1}^N$ è l'insieme degli zeri semplici che la funzione $g(x)$ possiede nell'insieme E , cioè $\{x_j\}_{j=1}^N \subset E$.

Nel caso precipuo si hanno: $E = (1, \infty)$, $g(x) = \sin(x)$, $f(x) = 1/x^2$ e $\{x_j = j\pi\}_{j=1}^\infty$, ne consegue che, anziché una somma, si avrà una serie, cioè

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_j^2} \frac{1}{|\cos(x_j)|} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{1}{|(-1)^j|} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}.$$

La somma della serie degli inversi dei quadrati dei numeri naturali si può ottenere con il metodo basato sul teorema dei residui, in particolare si ha

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \sum_{l=1}^N \text{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z), p_l \right],$$

dove T è il valore limite dell'integrale al divergere di n , cioè del raggio della circonferenza centrata nell'origine che rappresenta il percorso d'integrazione, $\{p_l\}_{l=1}^N$ è l'insieme dei poli al finito della funzione $f(z)$ non cancellati dagli zeri della funzione $\cos(\pi z)/\sin(\pi z)$. Ovviamente, richiediamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$, tale che: $\pm(n+1/2) \notin \{p_l\}_{l=1}^N$, $\forall n \geq n_0$. Qualora il valore di T sia finito, avremo la convergenza della serie la cui somma vale

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = T - \sum_{l=1}^N \text{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z), p_l \right].$$

Nel caso in studio, si ha $f(z) = 1/z^2$ e quindi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = T - \sum_{l=1}^N \text{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}, 0 \right],$$

si dimostra, usando il lemma di integrazione sugli archi infiniti, che $T = 0$. In particolare, si ha che, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi z)}{z \sin(\pi z)} \stackrel{u}{=} 0$$

uniforme sulle circonferenze centrate nell'origine di raggi $(n+1/2)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} dz = 0.$$

Studiamo, sulle circonferenze $\{z : z = (n+1/2)e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$, il modulo della funzione di cui vorremmo verificare il valor limite

$$\left| \frac{\cos(\pi z)}{z \sin(\pi z)} \right| = \frac{1}{n+1/2} \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| = \frac{1}{n+1/2} \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}} \right| = \frac{1}{n+1/2} \left| \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2i\pi x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2i\pi x}} \right|,$$

dove $x = (n+1/2)\cos(\theta)$, $y = (n+1/2)\sin(\theta)$ e l'ultima identità è stata ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{-i\pi x - \pi y}$. Consideriamo due casi: $y = 0$, ovvero: $\theta = 0, \pi$ e $x = \pm(n+1/2)$; $y \neq 0$, quindi $\theta \neq 0, \pi$ e, nel limite $n \rightarrow \infty$, y diverge a $+\infty$ se $0 < \theta < \pi$, a $-\infty$ se $\pi < \theta < 2\pi$. In dettaglio si ha

$$\left| \frac{\cos(\pi z)}{z \sin(\pi z)} \right| = \frac{1}{n+1/2} \left| \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2i\pi x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2i\pi x}} \right| \begin{cases} \sim \frac{1}{n+1/2} & y > 0, y \rightarrow \infty \\ \sim \frac{1}{n+1/2} & y < 0, y \rightarrow -\infty \\ = 0 & y = 0, x = \pm(n+1/2) \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ne consegue che $T = 0$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^N \text{Res} \left[\frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}, 0 \right].$$

L'origine rappresenta per la funzione integranda un polo di ordine tre, ne otteniamo il residuo calcolando il coefficiente -1 della sua serie di Laurent. A tal fine sfruttando le serie di Taylor delle funzione coseno e seno nell'origine, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} &= \frac{1 - (\pi z)^2/2! + (\pi z)^4/4! + O(z^6)}{z^2 ((\pi z) - (\pi z)^3/3! + (\pi z)^5/5! + O(z^7))} = \frac{1}{\pi z^3} \frac{1 - (\pi z)^2/2! + (\pi z)^4/4! + O(z^6)}{1 - (\pi z)^2/3! + (\pi z)^4/5! + O(z^6)} \\ &= \frac{1}{\pi z^3} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} + O(z^6) \right) \left[1 + \left(\frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} + O(z^6) \right) + \left(\frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} + O(z^6) \right)^2 + \dots \right] \\ &= \dots + \frac{1}{\pi z^3} \left(-\frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^2}{3!} \right) + \dots = \dots - \frac{\pi/3}{z} + \dots,\end{aligned}$$

da cui si ha che il coefficiente di $1/z$ e quindi il residuo vale $-\pi/3$. Sostituendo questo valore nell'espressione della somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^N \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}, 0 \right] = \frac{\pi^2}{6}.$$