Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 15 gennaio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sigma w}}{\operatorname{senh}(4w) + \cosh(4w) + 4} dw \, ,$$

dopo aver stabilito per quali valori di $\sigma \in \mathbb{C}$ esso converga.

Soluzione del primo problema

Usando per le funzioni iperboliche le definizioni in termini degli esponenziali si ha

$$S(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sigma w}}{e^{4w} + 4} dw \, ,$$

che, con la sostituzione $x = e^w$ $(dw = dx/x)$, diventa

$$S(\sigma) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1}}{x^4 + 4} dx \equiv \int_0^{\infty} x^{\sigma-1} R(x), dx \, ,$$

dove $R(x)$ è la funzione razionale

$$R(x) = \frac{1}{x^4 + 4} \, ,$$

che ha i quattro poli semplici

$$z_k = \sqrt{2}\, e^{(2k+1)i\pi/4} \, , \qquad k = 0, 1, 2, 3 \, .$$

Il comportamento della funzione razionale $R(x)$ agli estremi di integrazione è definito dalle potenze l e h, ovvero

$$R(x) \sim \left\{ \begin{array}{ll} x^0/4 = x^l/4 & x \to 0^+ \\ x^{-4} = x^h & x \to \infty \end{array} \right. \, ,$$

da cui $l = 0$ e $h = -4$. La condizione di convergenza è: $-1 - l < \operatorname{Re}(\sigma - 1) < -1 - h$, quindi

$$0 < \operatorname{Re}(\sigma) < 4 \, .$$

Ne consegue che $S(\sigma)$ è una funzione analitica nel rettangolo infinito

$$D = \{\sigma : 0 < \operatorname{Re}(\sigma) < 4\} \, .$$

Usando la formula risolutiva nota

$$\int_0^{\infty} s^{\mu} Q(s) ds = -\frac{\pi e^{-i\pi\mu}}{\operatorname{sen}(\pi\mu)} \sum_j^{\text{tot}} \operatorname{Res}\left[s^{\mu} Q(s), s = s_j\right] \, ,$$

dove $Q(s)$ è una funzione razionale che non ha poli in $(0,\infty)$ e agli estremi si comporta in modo tale da da garantire l'integrabilità, si ha

$$
\begin{aligned}
S(\sigma) &= -\frac{\pi e^{-i\pi(\sigma-1)}}{\mathrm{sen}(\pi(\sigma-1))}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[x^{\sigma-1}R(x), x=z_k\right] \\
&= -\frac{\pi e^{-i\pi\sigma}}{\mathrm{sen}(\pi\sigma)}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[x^{\sigma-1}R(x), x=z_k\right] .
\end{aligned}
$$

I residui sono

$$
\mathrm{Res}\left[x^{\sigma-1}R(x), x=z_k\right] = \frac{z_k^{\sigma-4}}{4} = -\frac{z_k^{\sigma}}{16} = -2^{\sigma/2-4}\, e^{(2k+1)i\pi\sigma/4}, \qquad k=0,1,2,3,
$$

dove si è usato il valore comune $z_k^4=-2$. La somma dei residui vale

$$
\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[x^{\sigma-1}R(x), x=z_k\right] = -2^{\sigma/2-4}e^{i\pi\sigma/4}\frac{1-e^{2i\pi\sigma}}{1-e^{i\pi\sigma/2}} = -2^{\sigma/2-4}e^{i\pi\sigma}\frac{\mathrm{sen}(\pi\sigma)}{\mathrm{sen}(\pi\sigma/4)},
$$

dove abbiamo usato la somma parziale terza (dei primi quattro termini) della serie geometrica di ragione $\alpha = e^{i\pi\sigma/2}$, ottenuta moltiplicando e dividendo per $1-\alpha$, ovvero

$$
\sum_{j=0}^{3}\alpha^n = \frac{1-\alpha^4}{1-\alpha} .
$$

Sostituendo il risultato precedente nell'espressione di $S(\sigma)$ si ha

$$
\begin{aligned}
S(\sigma) &= -\frac{\pi e^{-i\pi\sigma}}{\mathrm{sen}(\pi\sigma)}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[x^{\sigma-1}R(x), x=z_k\right] \\
&= \frac{\pi e^{-i\pi\sigma}}{\mathrm{sen}(\pi\sigma)}2^{\sigma/2-4}e^{i\pi\sigma}\frac{\mathrm{sen}(\pi\sigma)}{\mathrm{sen}(\pi\sigma/4)},
\end{aligned}
$$

e, semplificando, si arriva al risultato finale

$$
S(\sigma) = \frac{\pi\, 2^{\sigma/2-4}}{\mathrm{sen}(\pi\sigma/4)} .
$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
M_n = \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+x^n+1},
$$

con $n\in\mathbb{N}/\{0\}$.

Soluzione del secondo problema

L'integranda è l'inverso di un polinomio di grado $2n\in\mathbb{N}/\{0\}$, ha quindi $2n$ poli i corrispondenza degli zeri del polinomio. Per ottenere gli zeri, prima risolviamo l'equazione di secondo grado nella variabile x^n, che si ha ponendo a zero il denominatore della funzione integranda,

$$
(z^n)_\pm = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3},
$$

poi estraiamo le n radici n-esime di queste due soluzioni, ovvero

$$
z_k^\pm = e^{2i\pi(k\pm 1/3)/n}, \qquad k=0,1,\ldots,n-1 .
$$

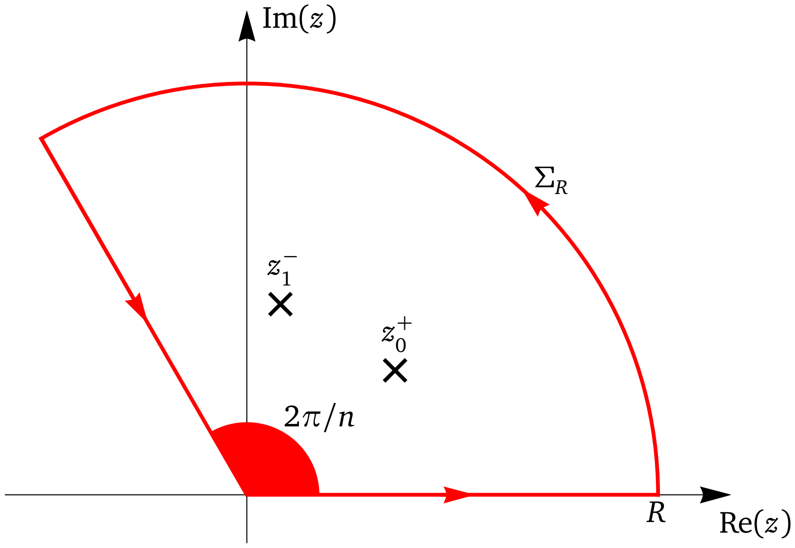
L'insieme $\left\{z_k^+, z_k^-\right\}_{k=0}^{n-1}$ contiene i $2n$ poli della funzione integranda.
Integriamo la stessa funzione integranda sul percorso chiuso, mostrato in figura,

$$\Sigma_R = S[0,r] \cup \gamma_R \cup S[Re^{2i\pi/n}, 0]\,,$$

dove con il simbolo $S[z_1, z_2]$ indichiamo il segmento che unisce i punti z_1 e z_2 orientato nella direzione che va dal primo al secondo punto e

$$\gamma_R = \left\{z : z = Re^{i\theta}\,, \theta \in [0, 2i\pi/n]\right\}\,.$$

È facile verificare che all'interno del percorso Σ_R ci sono solo due poli, si tratta di quelli che hanno la fase compresa



tra zero e $2\pi/n$, cioè

$$z_0^+ = e^{\frac{2i\pi}{3n}}\,, \qquad z_1^- = e^{\frac{4i\pi}{3n}}\,,$$

sono indicati in figura con il simbolo "$\times$". Usando il teorema dei residui si ha

$$\oint_{\Sigma_R} \frac{dz}{z^{2n}+z^n+1} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+z^n+1}, z_0^+\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+z^n+1}, z_1^-\right]\right)\,.$$

Questo risultato non dipende da R, quindi, scomponendo l'integrale nella somma dei contributi dovuti ai tratti rettilinei e all'arco, nel limite $R \to \infty$ si arriva all'identità

$$2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_0^+\right] + \mathrm{Res}\left[z_1^-\right]\right) = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Sigma_R}\frac{dz}{z^{2n}+z^n+1} = M\left(1-e^{2i\pi/n}\right) + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z^{2n}+z^n+1}\,. \tag{1}$$

L'ultimo limite è nullo, infatti, con $z = Re^{i\theta}$ e $\theta \in [0, 2i\pi/n]$,

$$\left|\frac{z}{z^{2n}+z^n+1}\right| \le \frac{R}{\left|z^n-(z^n)_+\right|\left|z^n-(z^n)_-\right|} \le \frac{R}{|R^n-1|\,|R^n-1|} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,,$$

dove abbiamo usato: $n \in \mathbb{N}/\{0\}$, ovvero $n \ge 1$, e il fatto che le soluzioni $(z^n)_\pm = e^{\pm 2i\pi/3}$ siano della fasi pure e quindi abbiano modulo unitario. Dall'Eq. (1) si arriva ad una espressione per l'integrale cercato che dipende solo dai residui, ovvero

$$M_n = \frac{2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_0^+\right] + \mathrm{Res}\left[z_1^-\right]\right)}{-2i\,e^{i\pi/n}\mathrm{sen}(\pi/n)} = -\frac{\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_0^+\right] + \mathrm{Res}\left[z_1^-\right]\right)}{e^{i\pi/n}\mathrm{sen}(\pi/n)}\,. \tag{2}$$

I residui sono

$$\text{Res}\left[z_0^+\right] = \frac{1}{2n(z_0^+)^{2n-1} + n(z_0^+)^{n-1}} = \frac{z_0^+}{n\left[(z_0^+)^{2n} + \underbrace{(z_0^+)^{2n} + (z_0^+)^n}_{-1}\right]} = \frac{z_0^+}{n\left[(z_0^+)^{2n} - 1\right]} = \frac{e^{2i\pi/(3n)}}{n\left[e^{4i\pi/3} - 1\right]}$$

$$= \frac{e^{2i\pi(1/n-1)/3}}{2in\,\text{sen}(2\pi/3)} = \frac{e^{2i\pi(1/n-1)/3}}{in\sqrt{3}},$$

$$\text{Res}\left[z_1^-\right] = \frac{z_1^-}{n\left[(z_1^-)^{2n} - 1\right]} = \frac{e^{4i\pi/(3n)}}{n\left[e^{8i\pi/3} - 1\right]} = \frac{e^{4i\pi(1/n-1)/3}}{2in\,\text{sen}(4\pi/3)} = -\frac{e^{4i\pi(1/n-1)/3}}{in\sqrt{3}},$$

e la loro somma vale

$$\text{Res}\left[z_0^+\right] + \text{Res}\left[z_1^-\right] = \frac{e^{2i\pi(1/n-1)/3} - e^{4i\pi(1/n-1)/3}}{in\sqrt{3}} = e^{i\pi(1/n-1)}\frac{-2i\,\text{sen}(\pi(1/n-1)/3)}{in\sqrt{3}}$$

$$= e^{i\pi/n}\frac{2\,\text{sen}(\pi(1/n-1)/3)}{n\sqrt{3}}.$$

Usiamo questo risultato nell'espressione di Eq. (2) per ottenere il valore di M

$$M_n = -\frac{2\pi\,\text{sen}(\pi(1/n-1)/3)}{n\sqrt{3}\,\text{sen}(\pi/n)}.$$

Ad esempio, con $n = 2$ si ha

$$M_2 = \frac{\pi\,\text{sen}(\pi/6)}{\sqrt{3}\,\text{sen}(\pi/2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$F = \oint_{|z|=1} \frac{\text{sen}(z^2)}{z^6\,\text{senh}(z)} dz.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda è una funzione meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Ha poli in corrispondenza degli zeri del denominatore cui non corrispondono zeri di ordine uguale o superiore del numeratore. È facile osservare che in quanto sia la funzione seno iperbolico che che la funzione seno hanno zeri semplici nell'origine, quest'ultima rappresenta per la funzione integranda un polo di ordine 5. Gli altri poli tutti semplici si hanno nei punti $z_k = ik\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}/\{0\}$. Ne consegue che il percorso di integrazione, il cerchio unitario, avvolge soltanto il polo di ordine 5 che si trova nell'origine, quindi

$$F = \oint_{|z|=1} \frac{\text{sen}(z^2)}{z^6\,\text{senh}(z)} dz = 2i\pi\,\text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z^2)}{z^6\,\text{senh}(z)}, 0\right].$$

Il calcolo del residuo può essere effettuato direttamente come derivata quarta, cioè

$$\text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z^2)}{z^6\,\text{senh}(z)}, 0\right] = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\frac{\text{sen}(z^2)}{z\,\text{senh}(z)}\bigg|_{z=0},$$

ma questo metodo è piuttosto macchinoso e quindi soggetto ad errori di calcolo.
Un'alternativa è rappresentata dall'utilizzo della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine e convergente nella "prima" corona, ovvero in $C_{0,1} = \{z : 0 < |z| < \pi\}$. Infatti, questa serie ha come coefficiente della potenza z^{-1} il residuo nell'origine cercato. Il vantaggio nell'utilizzo di questo metodo consiste nella possibilità di

sfruttare le serie di Taylor note. In particolare, indicando con $f(z)$ la funzione integranda, si ha

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^6}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^{-1} = \frac{1}{z^6}\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\cdots\right)\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)^{-1} \\
&= \left(z^{-5}-\frac{z^{-1}}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^{-1} \\
&= \left(z^{-5}-\frac{z^{-1}}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\cdots\right)\left[1-\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right].
\end{aligned}
$$

Otteniamo direttamente il coefficiente della potenza z^{-1}, a tal fine è necessario considerare i prodotti delle potenza z^4 del secondo termine con la potenza z^{-5} del primo e il prodotto della costante del secondo termine per l'unica potenza z^{-1} del primo. Ne consegue che

$$
f(z) = \cdots + \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right)+\cdots = \cdots - \frac{1}{z}\frac{53}{360}+\cdots,
$$

da cui il valore dell'integrale

$$
F = -\frac{53i}{180}\pi .
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si consideri l'equazione per il vettore $|q\rangle$

$$
\hat{A}^2|q\rangle - \beta|q\rangle = |r\rangle ,
$$

dove l'operatore hermitiano $\hat{A}$, che agisce in uno spazio di Hilbert a 3 dimensioni, lo scalare β e il vettore $|r\rangle \neq |0\rangle$ sono fissati. Si determini l'insieme dei valori di β per i quali l'equazione ammette soluzione.
Inoltre, sapendo che

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

sono la matrice ed il vettore colonna che rappresentano rispettivamente l'operatore $\hat{A}$ e il vettore $|r\rangle$ rispetto alla basa canonica, si ricavi la rappresentazione del vettore $|q\rangle$ soluzione dell'equazione nel caso $\beta = 6$.

Soluzione del quarto problema

L'operatore hermitiano $\hat{A}$, essendo normale, è diagonalizzabile e verifica quindi il teorema spettrale. Ciò implica che gli operatori $\hat{A}^2$ e $\hat{A}$ siano diagonalizzabili simultaneamente, ovvero che ammettano lo stesso insieme ortonormale di autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$. Si hanno quindi le equazioni agli autovalori

$$
\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle , \qquad \hat{A}^2|a_k\rangle = \alpha_k^2|a_k\rangle , \qquad k=1,2,3,
$$

dove gli insiemi $\{\alpha_k\}_{k=1}^3$ e $\{\alpha_k^2\}_{k=1}^3$ sono, rispettivamente, gli spettri discreti di $\hat{A}$ e $\hat{A}^2$. Di conseguenza, gli operatori risolventi

$$
\hat{A}_\alpha = \left(\alpha\hat{I}-\hat{A}\right)^{-1}, \qquad \hat{A}^2_\beta = \left(\beta\hat{I}-\hat{A}^2\right)^{-1},
$$

esistono e sono limitati se e solo se, rispettivamente, $\alpha \notin \{\alpha_k\}_{k=1}^3$ e $\beta \notin \{\alpha_k^2\}_{k=1}^3$.
La soluzione dell'equazione data può essere ottenuta in termini dell'operatore risolvente di $\hat{A}^2$, infatti si ha

$$
\hat{A}^2|q\rangle - \beta|q\rangle = |r\rangle \qquad \Rightarrow \qquad -\left(\beta\hat{I}-\hat{A}^2\right)|q\rangle = |r\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |q\rangle = -\hat{A}^2_\beta|r\rangle ,
$$

ovvero, otteniamo la soluzione come risultato dell'azione dell'opposto dell'operatore risolvente, $-\hat{A}^2_\beta$, sul vettore dato $|r\rangle$. Poiché, questo operatore esiste ed è limitato se e solo se $\beta \notin \{\alpha_k^2\}_{k=1}^3$, avremo che l'insieme dei valori di β

per i quali l'equazione data ammette soluzione è $\mathbb{C}/\left\{\alpha_k^2\right\}_{k=1}^3$.
Calcoliamo gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ sfruttando la rappresentazione matriciale data. Consideriamo, in particolare, l'equazione secolare

$$\det(A-\alpha I)=0$$
$$\det\begin{pmatrix} 2-\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & i \\ 0 & -i & 2-\alpha \end{pmatrix}=0$$
$$(2-\alpha)\left[(2-\alpha)^2-2\right]=0\,,$$

le cui soluzioni rappresentano gli autovalori

$$\alpha_1=2-\sqrt{2}\,,\qquad \alpha_2=2\,,\qquad \alpha_3=2+\sqrt{2}\,.$$

L'autovettore relativo al j-esimo autovalore

$$a_j=\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}\,,\qquad j=1,2,3\,,$$

si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2-\alpha_j & 1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha_j & i \\ 0 & -i & 2-\alpha_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Posto $x_j=1$ per ogni autovettore, $j=1,2,3$, dalla prima e seconda equazione si hanno le espressioni per le seconde e terze componenti

$$y_j=\alpha_j-2=\begin{cases} -\sqrt{2} & j=1 \\ 0 & j=2 \\ \sqrt{2} & j=3 \end{cases}\,,\qquad z_j=i+iy_j(2-\alpha_j)=i\left(1-y_j^2\right)=\begin{cases} -i & j=1 \\ i & j=2 \\ -i & j=3 \end{cases}\,.$$

Di conseguenza gli autovettori normalizzati sono

$$a_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}\,,\qquad a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\,,\qquad a_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}\,,$$

si tratta di vettori ortonormali, quindi l'insieme $\left\{a_k\right\}_{k=1}^3$ rappresenta una base ortonormale. La matrice unitaria U, che diagonalizza sia A che A^2, è quella matrice che ha per colonne i tre autovettori, ovvero

$$U=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & i/\sqrt{2} & -i/2 \end{pmatrix}\,,$$

con cui si hanno le diagonalizzazioni

$$A_d=U^\dagger AU=\mathrm{diag}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\,,\qquad A_d^2=U^\dagger A^2U=\mathrm{diag}\left(\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_3^2\right)\,.$$

Tramite la matrice U possiamo diagonalizzare l'equazione, infatti moltiplicando da sinistra per $U^\dagger$ ed usando l'identità $UU^\dagger=I$, si ha

$$A^2q-\beta q=r\qquad\Rightarrow\qquad U^\dagger A^2UU^\dagger q-U\dagger\beta q=U^\dagger r\qquad\Rightarrow\qquad A_d^2q'-\beta q'=r'\,,$$

dove con $q'=U^\dagger q$ ed $r'=U^\dagger r$ abbiamo indicato le rappresentazioni rispetto alla base $\left\{|a_k\rangle\right\}_{k=1}^3$ dei vettori $|q\rangle$ e $|r\rangle$. L'equazione in forma diagonale può essere risolta direttamente come

$$A_d^2q'-\beta q'=r'\quad\Rightarrow\quad q'=\left(A_d^2-\beta I\right)^{-1}r'\quad\Rightarrow\quad q'=\mathrm{diag}\left(1/(\alpha_1^2-\beta),1/(\alpha_2^2-\beta),1/(\alpha_3^2-\beta)\right)r'\,.$$

Per ottenere la rappresentazione del vettore soluzione rispetto alla base canonica è sufficiente moltiplicare q' per la matrice unitaria diagonalizzante U, cioè

$$q = Uq' = U\text{diag}\left(1/(\alpha_1^2-\beta), 1/(\alpha_2^2-\beta), 1/(\alpha_3^2-\beta)\right) r' = U\text{diag}\left(1/(\alpha_1^2-\beta), 1/(\alpha_2^2-\beta), 1/(\alpha_3^2-\beta)\right) U^\dagger r\,.$$

usando il valore dato $\beta = 6$, gli autovalori e l'espressione della matrice diagonalizzante U, si ha

$$\begin{aligned}
q &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & i/\sqrt{2} & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(2-\sqrt{2})^2-6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^2-6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & i/\sqrt{2} & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & i/\sqrt{2} & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & -i/2 \\ -2 & 0 & 2i \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-1+2i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} \\ (-2-3i)/\sqrt{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da cui la rappresentazione cercata

$$q = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+i \\ -2-3i \end{pmatrix}.$$

Possiamo verificare questo risultato, infatti calcolando direttamente il primo membro dell'equazione

$$\begin{aligned}
A^2 q - 6q &= \frac{1}{8} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+i \\ -2-3i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 & i \\ 4 & 6 & 4i \\ -i & -4i & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+i \\ -2-3i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 4 & i \\ 4 & 0 & 4i \\ -i & -4i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+i \\ -2-3i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1-2i+4+4i-2i+3 \\ -4+8i-8i+12 \\ i+2-4i+4+2+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r\,,
\end{aligned}$$

si ottiene il vettore r.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la funzione $f(x)$ soluzione dell'equazione integrale

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\delta'(k)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} f(y)\,dy\,,$$

dove la prima funzione a secondo membro, $\mathscr{F}_{-x}\left[\delta'(k)\right]$, rappresenta l'anti-trasformata di Fourier della derivata prima della Delta di Dirac.
Suggerimento. Potrebbe essere d'aiuto l'utilizzo delle trasformate di Fourier.

Soluzione del quinto problema

Prima di fare la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'equazione data, seguendo il suggerimento, osserviamo che l'integrale a secondo membro rappresenta la convoluzione delle funzione incognita $f(x)$ con il prodotto di una fase e di una funzione di Gauss, cioè

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\delta'(k)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(f(x) * e^{ix-x^2}\right) .$$

Il teorema della convoluzione afferma che la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzione è pari a $\sqrt{2\pi}$ volte il prodotto delle trasformate di Fourier. Quindi facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \delta'(k) + \sqrt{2}\mathscr{F}_k\left[f\right]\mathscr{F}_k\left[e^{ix-x^2}\right] ,$$

si tratta di una equazione algebrica nella trasformata di Fourier della soluzione.
Calcoliamo l'ultima trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[e^{ix-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix-x^2}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(k-1)-x^2}dx = \frac{e^{-(k-1)^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x+i(k-1)/2]^2}dx ,$$

con la sostituzione $u = x + i(k-1)/2$ si ottiene

$$\mathscr{F}_k\left[e^{ix-x^2}\right] = \frac{e^{-(k-1)^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+i(k-1)/2}^{\infty+i(k-1)/2} e^{-u^2}du = \frac{e^{-(k-1)^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{e^{-(k-1)^2/4}}{\sqrt{2}} .$$

Si noti che i due integrali dell'espressione precedente sono uguali in quanto è possibile ottenere il secondo percorso d'integrazione, l'asse reale, deformando con continuità il primo, la retta parallela all'asse reale luogo dei punti con parte immaginaria costante $(k-1)/2$, ciò è conseguenza del fatto che la funzione integranda non ha singolarità all'interno del rettangolo infinito avente i due percorsi come lati paralleli.
Sostituendo questo risultato nell'equazione per le trasformate di Fourier si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \delta'(k) + \mathscr{F}_k\left[f\right]\, e^{-(k-1)^2/4},$$

da cui la trasformata di Fourier della soluzione

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \frac{\delta'(k)}{1 - e^{-(k-1)^2/4}} .$$

Facendo l'anti-trasformata di Fourier si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned}
f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{\delta'(k)}{1-e^{-(k-1)^2/4}}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta'(k)}{1-e^{-(k-1)^2/4}}e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(k)}{1-e^{-(k-1)^2/4}}e^{ikx}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix\left(1-e^{-(k-1)^2/4}\right) - e^{-(k-1)^2/4}(k-1)/2}{\left(1-e^{-(k-1)^2/4}\right)^2}\delta(k)e^{ikx}dk \\
&= -\frac{ix\left(1-e^{-(k-1)^2/4}\right) - e^{-(k-1)^2/4}(k-1)/2}{\sqrt{2\pi}\left(1-e^{-(k-1)^2/4}\right)^2}e^{ikx}\Bigg|_{k=0} \\
&= -\frac{ix\left(1-e^{-1/4}\right) + e^{-1/4}/2}{\sqrt{2\pi}\left(1-e^{-1/4}\right)^2} ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\delta(\pm\infty) = 0$. Infine, moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{1/2}$ si ha la soluzione

$$f(x) = -e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right) + 1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} .$$

Verifichiamo che sostituendo l'espressione trovata per la funzione $f(x)$ nell'equazione integrale si ottenga effettivamente un'identità.

Cominciamo con il calcolare esplicitamente la convoluzione per cui si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} f(y)dy &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} e^{1/4} \frac{iy\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{ie^{1/4}}{\left(e^{1/4}-1\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} y dy + \frac{e^{1/4}}{2\left(e^{1/4}-1\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{ie^{1/4}}{2\left(e^{1/4}-1\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2}\left[i-2(x-y)\right]dy\right. \\
&\quad \left. +\frac{ie^{1/4}(x-i/2)}{\left(e^{1/4}-1\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy + \frac{e^{1/4}}{2\left(e^{1/4}-1\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy\right] \\
&= \frac{ie^{1/4}}{2\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)} e^{i(x-y)-(x-y)^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{ie^{1/4}(x-i/2)}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy \\
&\quad -\frac{e^{1/4}}{2\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy \\
&= -\frac{ie^{1/4}\left[(2x-i)\left(e^{1/4}-1\right)-i\right]}{2\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)-(x-y)^2} dy \\
&= -\frac{ie^{1/4}\left[(2x-i)\left(e^{1/4}-1\right)-i\right]}{2\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} e^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[(x-y)-i/2\right]^2} dy \\
&= -\frac{i\left[(2x-i)\left(e^{1/4}-1\right)-i\right]}{2\sqrt{2}\left(e^{1/4}-1\right)^2}\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo anche l'anti-trasformata di Fourier della derivata prima della Delta di Dirac

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\delta'(k)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\delta(k)e^{ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - ix\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k)e^{ikx}dk\right) = -\frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Usando i risultati precedenti, l'equazione completa diventa

$$\begin{gathered}
f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\delta'(k)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(f(x) * e^{ix-x^2}\right) \\
-e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} = -\frac{ix}{\sqrt{2\pi}} - \frac{i\left[(2x-i)\left(e^{1/4}-1\right)-i\right]}{2\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2}\,.
\end{gathered}$$

Procediamo manipolando il secondo membro così da porlo nella forma del primo, ovvero separiamo il termine proporzionale alla variabile x da quello costante,

$$\begin{aligned}
-e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} &= -\frac{i\left[(x-i/2)\left(e^{1/4}-1\right)-i/2+x\left(e^{1/4}-1\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} \\
-e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} &= -\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)\left(1+e^{1/4}-1\right)+i\left[-\left(e^{1/4}-1\right)i/2-i/2\right]}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} \\
-e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} &= -\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)e^{1/4}+e^{1/4}/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} \\
-e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2} &= -e^{1/4}\frac{ix\left(e^{1/4}-1\right)+1/2}{\sqrt{2\pi}\left(e^{1/4}-1\right)^2}\,.
\end{aligned}$$

L'identità è ora evidente, ciò prova che l'espressione trovata per la funzione $f(x)$ rappresenta una soluzione dell'equazione integrale.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la funzione $f(x)$ che verifica l'equazione

$$f(x+3i/2)+f(x-i/2)=\delta(x).$$

Soluzione del sesto Problema

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+3i/2)e^{-ikx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-i/2)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

con le sostituzioni $x'=x+3i/2$ e $x''=x-i/2$, rispettivamente nel primo e secondo integrale,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ik(x'-3i/2)}dx'+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x'')e^{-ik(x''+i/2)}dx''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\left(e^{-3k/2}+e^{k/2}\right)\tilde f(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

da cui si ottiene la trasformata di Fourier della soluzione

$$\tilde f(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{e^{-3k/2}+e^{k/2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{e^{-k/2}\left(e^{-k}+e^{k}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^{k/2}}{\cosh(k)}.$$

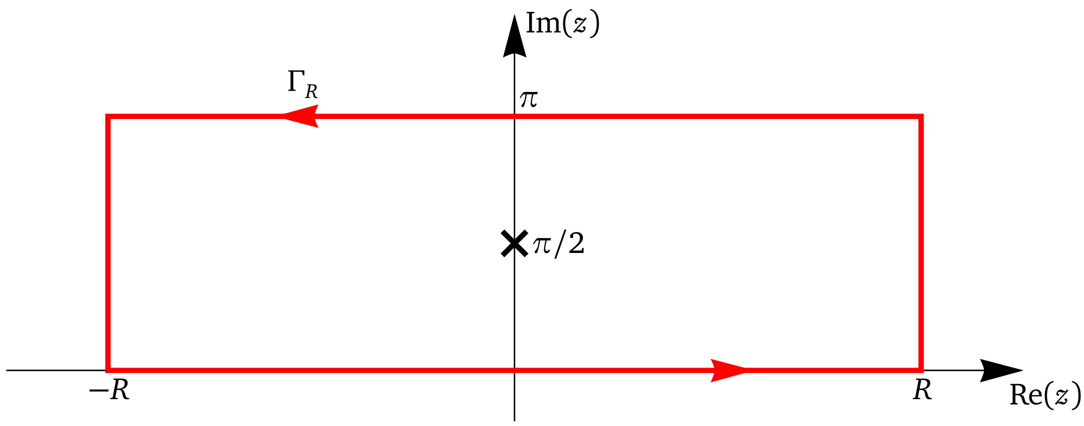
La soluzione è data dall'anti-trasformata di Fourier

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde f(k)dk=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)}dk.$$

Per calcolare questo integrale consideriamo quello della stessa integranda sul percorso rettangolare, mostrato in figura,

$$\Gamma_R=S[-R,R]\cup S[R,R+i\pi]\cup S[R+i\pi,-R+i\pi]\cup S[-R+i\pi,-R],$$

dove con il simbolo $S[k_1,k_2]$ indichiamo il segmento di estremo k_1 e k_2, orientato dal primo verso il secondo punto. All'interno del rettangolo Γ_R la funzione integranda ha una solo singolarità, un polo semplice in $k=i\pi/2$, ne



consegue che l'integrale può essere calcolato con il teorema dei residui, cioè

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)}dk=2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)},\frac{i\pi}{2}\right]=2i\pi\frac{e^{i\pi(ix+1/2)/2}}{\mathrm{senh}(i\pi/2)}=2i\pi\frac{e^{-\pi x/2+i\pi/4}}{i}=2\pi\,e^{-\pi x/2+i\pi/4}.$$

Questo risultato non dipende da R, quindi, inserendo anche il fattore $1/(4\pi)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-\pi x/2+i\pi/4}}{2} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)}dk &= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)}dk - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(k+i\pi)(ix+1/2)}}{\cosh(k+i\pi)}dk\right.\\
&\left. + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{(R+is)(ix+1/2)}}{\cosh(R+is)}ds - \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{(-R+is)(ix+1/2)}}{\cosh(-R+is)}ds\right)\\
&= \frac{1+e^{i\pi(ix+1/2)}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{k(ix+1/2)}}{\cosh(k)}dk\\
&= \left(1+e^{i\pi(ix+1/2)}\right)f(x)\,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Abbiamo usato i valori limite

$$
\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{(\pm R+is)(ix+1/2)}}{\cosh(\pm R+is)}ds = 0\,, \qquad (4)
$$

che si ottengono per mezzo della disuguaglianza di Darboux, ovvero si ha

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{(\pm R+is)(ix+1/2)}}{\cosh(\pm R+is)}ds\right| \le 2e^{\pm R/2}\int_0^{\pi}\frac{e^{-xs}}{\left|e^{\pm R+is}+e^{\mp R-is}\right|}ds \le 2e^{\pm R/2}\int_0^{\pi}\frac{e^{-xs}}{\left|e^{\pm R}-e^{\mp R}\right|}ds &= \frac{2e^{\pm R/2}}{\left|e^{\pm R}-e^{\mp R}\right|}\frac{1-e^{-x\pi}}{x}\\
&\underset{R\to\infty}{\sim} 2e^{-R(1\mp 1/2)}\frac{1-e^{-x\pi}}{x}\,,
\end{aligned}
$$

con entrambi i segni il comportamento è infinitesimo al divergere di $R\to\infty$, da cui il limite di Eq. (4).
Otteniamo $f(x)$ dall'Eq. (3)

$$
f(x) = \frac{e^{i\pi(ix+1/2)/2}}{2\left(1+e^{i\pi(ix+1/2)}\right)} = \frac{1}{4\cos((ix+1/2)\pi/2)} = \frac{1}{4\cosh((x-i/2)\pi/2)}\,.
$$