Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello estivo - 14 luglio 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Quante soluzioni ha l'equazione

$$z^4 + z^3 - 4z^2 + 1 = 0$$

nella corona circolare $C_{13} = \{z : 1 < |z| < 3\}$?

Soluzione del primo problema

Definiamo i due polinomi

$$f(z) = -4z^2 + 1\,, \qquad g(z) = z^4 + z^3\,,$$

la cui somma dà il polinomio dato. Infatti, nella prospettiva di utilizzare il teorema di Rouché, i due polinomi sono definiti in modo tale che la somma dia il polinomio di partenza e che quello il cui modulo è strettamente del modulo dell'altro sulla frontiera del dominio considerato abbia zeri facilmente calcolabili. In questo frangente il dominio è il disco unitario, la frontiera è la circonferenza unitaria e il polinomio con zeri facilmente calcolabili è $f(z)$. Usando la diseguaglianza triangolare, sulla circonferenza unitaria $\{z : |z| = 1\}$, i moduli dei polinomi $f(z)$ e $g(z)$ sono così limitati

$$|f(z)| \geq \big||-4z^2| - 1\big| = 3\,, \qquad |g(z)| \leq |z^4| + |z^3| = 2\,,$$

ovvero, su tale circonferenza si ha la relazione

$$|g(z)| \leq 2 < 3 \leq |f(z)|\,.$$

Applicando il teorema di Rouché, si ottiene che nel disco unitario il polinomio dato ha lo stesso numero di zeri del polinomio $f(z)$, che è di secondo grado e ha gli zeri $z_\pm = \pm 1/2$, entrambi appartamenti al disco unitario. Ne deduciamo che due delle quattro soluzioni dell'equazione data sono interne al disco unitario e quindi non appartengono alla corona circolare C_{13}.
Consideriamo ora i due polinomi $h(z) = z^4$ e $j(z) = z^3 - 4z^2 + 1$, definiti con i criteri già descritti e quindi la loro somma è il polinomio dato. Il dominio di interesse è in questo caso il disco centrato nell'origine, di raggio 3, sulla cui frontiera, la circonferenza $\{z : |z| = 3\}$, il modulo del polinomio $h(z)$ è costante, mentre quello del polinomio $j(z)$ può essere limitato usando la diseguaglianza triangolare, cioè

$$|h(z)| = 3^4 = 81\,, \qquad |j(z)| \leq |z^3| + |4z^2| + 1 = 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1 = 64\,,$$

da cui la relazione

$$|j(z)| \leq 64 < 81 = |h(z)|\,.$$

Ancora una volta, grazie al teorema di Rouché, si evince che nel centrato nell'origine di raggio 3, il polinomio dato e il polinomio $h(z)$ hanno lo stesso numero di zeri. Il polinomio $h(z)$, essendo semplicemente la quarta potenza z^4, ha un unico zero nell'origine di molteplicità quattro, quindi tutti i suoi quattro zeri appartengono nel disco di raggio 3. Ne consegue che anche il polinomio dato ha tutti gli zeri nel disco di raggio 3 e avendone 2 in quello di raggio 1, si ottiene che nella corona circolare C_{13}, l'equazione data ha due soluzioni.

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si dimostri che le funzioni

$$\mathcal{A}(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\cosh(y)}\,, \qquad \mathcal{B}(x,y) = \frac{\operatorname{senh}(y)}{\cos(x)+\cosh(y)}\,,$$

sono armoniche e se ne identifichino e classifichino le singolarità in $\mathbb{R}^2$.

Curiosità. I simboli $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rappresentano due *Unown*, ovvero dei *Pokémon* di tipo *Psico* introdotti in seconda generazione. La natura degli *Unown* è misteriosa, hanno corpi sottili di forma bidimensionale e sono di colore nero. Ne sono stati scoperti 28, 26 dei quali sono associati alle lettere dell'alfabeto latino e 2 ai punti esclamativo e interrogativo. I due *Unown* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono associati rispettivamente alle lettere A e B.

Soluzione del secondo problema

Sono funzioni armoniche le parti reali e immaginarie di funzioni analitiche. Nota, ad esempio, la funzione che rappresenta la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, con $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, e $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, si ottiene la funzione $f(z)$ completa usando la formula

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - u(0,0)\,.$$

Nel primo dei due casi, ovvero usando come funzione parte reale $\mathcal{A}(x,y)$ e indicando con $A(z)$ la funzione completa, si ha

$$A(z) = 2\mathcal{A}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - \mathcal{A}(0,0) = 2\mathcal{A}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}(z/2)}{\cos(z/2)+\cosh(-iz/2)} = 2\frac{\operatorname{sen}(z/2)}{\cos(z/2)+\cos(z/2)} = \tan\left(\frac{z}{2}\right).$$

Questa funzione, ovvero la funzione tangente è analitica in $D = \mathbb{C}\setminus\{(2k+1)\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$, cioè nel piano complesso privato dei poli semplici coincidenti con i multipli dispari positivi e negativi di $\pi/2$, che, essendo l'argomento $z/2$, sono per la z i multipli dispari positivi e negativi di π. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, all'insieme D corrisponde l'insieme $D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z = x+iy \in D\right\}$, che è quindi il dominio in cui la funzione $\mathcal{A}(x,y)$ è armonica.
Per lo studio della funzione $\mathcal{B}(x,y)$ procediamo allo stesso modo, indichiamo con $B(z)$ la funzione completa e si ha

$$B(z) = 2\mathcal{B}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - \mathcal{B}(0,0) = 2\mathcal{A}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) = 2\frac{\operatorname{senh}(-iz/2)}{\cos(z/2)+\cosh(-iz/2)} = -2i\frac{\operatorname{sen}(z/2)}{\cos(z/2)+\cos(z/2)} = -i\tan\left(\frac{z}{2}\right).$$

Questa funzione è analitica come la precedente, da cui differisce per una costante moltiplicativo, $-i$. Quindi ha lo stesso dominio di analiticità D e la funzione $\mathcal{B}(x,y)$ è analitica in D_R.

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si calcoli il limite del prodotto

$$@_n = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{n}{k}\right)^{-1} m^{n/m}\,,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Curiosità. Il simbolo $@$ rappresenta il *Pokémon Unown* associato alla lettera C.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Si procede sfruttando le proprietà algebriche dei prodotti e del fattoriale, si ha

$$\begin{aligned}
@_n &= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{n}{k}\right)^{-1} m^{n/m} = \lim_{m\to\infty} m^n \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{n}{k}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty} m^n \prod_{k=1}^{m} \frac{k}{k+n} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m!\,m^n}{(1+n)(2+n)\cdots(m+n)} = n!\,\lim_{m\to\infty} \frac{m!\,m^n}{(m+n)!} = n!\,\lim_{m\to\infty} \frac{m!\,m^n}{m!(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \\
&= n!\,\lim_{m\to\infty} \frac{m^n}{\underbrace{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}_{\text{sono } n \text{ binomi contenti } m}} = n!\,\underbrace{\lim_{m\to\infty} \frac{m^n}{m^n + \mathcal{O}\left(m^{n-1}\right)}}_{=1} = n!\,.
\end{aligned}$$

Quindi il limite del prodotto è

$$@_n = n!\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che le matrici che rappresentano i due operatori $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ rispetto alla base ortonormale $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ dello spazio vettoriale di Banach a tre dimensioni in cui agiscono, sono

$$\hat{X} \overset{w}{\hookleftarrow} X = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{Y} \overset{w}{\hookleftarrow} Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

si dimostrino le due identità operatoriali

$$\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \hat{X}^j \hat{Y}^{n-j}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,; \qquad \hat{Y} e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = \hat{Y} e^{\hat{X}+\hat{Y}}\,.$$

Si ottengano gli autovalori dell'operatore

$$\widehat{\circledS} = \hat{Y} e^{\hat{X}+\hat{Y}}\,,$$

la matrice $\circledS$ e i vettori che rappresentano l'operatore e gli autovettori rispetto alla base ortonormale $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^{3}$.

Curiosità. Il simbolo $\circledS$ rappresenta il *Pokémon Unown* associato alla lettera S.

Soluzione del quarto problema

Consideriamo i due prodotti matriciali XY e YX, che rappresentano gli operatori prodotto corrispondenti $\hat{X}\hat{Y}$ e $\hat{Y}\hat{X}$ rispetto alla base data, si hanno

$$\hat{X}\hat{Y} \overset{w}{\hookleftarrow} XY = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\hat{Y}\hat{X} \overset{w}{\hookleftarrow} XY = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui si deduce che il secondo prodotto operatoriale dà l'operatore nullo e che, in generale

$$\hat{Y}^m \hat{X}^n = \hat{0}\,, \qquad \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2\,,$$

dove $\hat{0}$ è l'operatore nullo.
Ne consegue che l'operatore potenza n-esima

$$\begin{aligned}
\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^n &= \left(\hat{X}+\hat{Y}\right)\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^{n-1} = \hat{X}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^{n-1} + \hat{Y}^n = \hat{X}\left[\hat{X}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^{n-2} + \hat{Y}^{n-1}\right] + \hat{Y}^n \\
&= \hat{X}^2\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^{n-2} + \hat{X}\hat{Y}^{n-1} + \hat{Y}^n = \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{n} \hat{X}^j \hat{Y}^{n-j}\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato la coincidenza con l'operatore nullo di tutti i prodotti che hanno a sinistra potenze maggiori di zero dell'operatore $\hat{Y}$ e a destra potenze maggiori di zero dell'operatore $\hat{X}$.
L'operatore

$$\begin{aligned}
\hat{Y}e^{\hat{X}+\hat{Y}} &= \hat{Y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{Y}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^k}{k!} = \hat{Y} + \underbrace{\hat{Y}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)}_{=\hat{Y}^2} + \underbrace{\frac{\hat{Y}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^2}{2!}}_{=\hat{Y}^3/2!} + \underbrace{\frac{\hat{Y}\left(\hat{X}+\hat{Y}\right)^3}{3!}}_{=\hat{Y}^4/3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{Y}^{j+1}}{j!} \\
&= \hat{Y}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{Y}^j}{j!}\,,
\end{aligned}$$

dove sono non diversi dall'operatore nullo solo i prodotti contenenti l'operatore $\hat{Y}$, poiché tutti gli altri sono della forma $\hat{Y}^m\hat{X}^n$, con $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Dall'ultima identità segue

$$\hat{Y}e^{\hat{X}+\hat{Y}} = \hat{Y}e^{\hat{Y}}\,.$$

Usando lo stesso ragionamento si ha

$$\hat{Y}e^{\hat{X}} = \hat{Y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{X}^k}{k!} = \hat{Y}\left(\hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{X}^k}{k!}\right) = \hat{Y} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{Y}\hat{X}^k}{k!} = \hat{Y}\,,$$

infatti tutti gli operatori della serie del penultimo membro sono nulli. Sostituendo l'operatore $\hat{Y}$ con $\hat{Y}e^{\hat{X}}$ nell'identità $\hat{Y}e^{\hat{X}+\hat{Y}} = \hat{Y}e^{\hat{Y}}$ ottenuto precedentemente, si ha

$$\hat{Y}e^{\hat{X}+\hat{Y}} = \hat{Y}e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}}\,,$$

che è la seconda di cui si richiedeva la dimostrazione.
L'operatore $\widehat{\circledcirc}$ di cui si richiedono autovalori e autovettori dipende solo dall'operatore $\hat{Y}$, infatti si ha

$$\widehat{\circledcirc} = \hat{Y}e^{\hat{Y}}\,.$$

La matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^3$ è

$$\widehat{\circledcirc} \overset{w}{\longleftrightarrow} \circledcirc = Ye^Y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{j+1}}{j!} \,,$$

dove Y è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{Y}$ data dal problema. Gli autovalori dell'operatore $\hat{Y}$ sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{gathered}
\det(I\lambda - Y) = 0 \\
\det \begin{pmatrix} \lambda + 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \lambda + 1/2 \end{pmatrix} = 0 \\
(\lambda - 1)\left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = 0 \,,
\end{gathered}$$

da cui si hanno i tre autovalori

$$\lambda_1 = 1 \,, \qquad \lambda_2 = -1 \,, \qquad \lambda_3 = 0 \,.$$

La matrice diagonale che rappresenta l'operatore $\hat{Y}$ rispetto alla base dei sui autovettori è

$$Y_d = \mathrm{diag}(1, -1, 0) \,.$$

Le potenze pari e dispari di questa matrice sono

$$Y_d^{2n} = \mathrm{diag}(1, 1, 0) = Y_d^2 \,, \qquad Y_d^{2n+1} = \mathrm{diag}(1, -1, 0) = Y_d \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,.$$

Le stesse relazioni si hanno per la matrice Y, infatti detta V la matrice diagonalizzante, tale che cioè, $Y_d = V^{-1} Y V$ e anche $Y_d^l = V^{-1} Y^l V$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$. Ne consegue che,

$$Y^{2n} = V Y_d^{2n} V^{-1} = V Y_d^2 V^{-1} = Y^2 \,, \qquad Y^{2n+1} = V Y_d^{2n+1} V^{-1} = V Y_d V^{-1} = Y \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,.$$

La matrice $\circledcirc$ si ottiene come somma della serie

$$\begin{aligned}
\circledcirc &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{j+1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{2j+1}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{2(j+1)}}{(2j+1)!} = Y \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} + Y^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = Y \cosh(1) + Y^2 \,\mathrm{senh}(1) \,. \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cosh(1) + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathrm{senh}(1) \,,
\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\circledcirc = \begin{pmatrix} -1/(2e) & 0 & -1/(2e) \\ 0 & e & 0 \\ -1/(2e) & 0 & -1/(2e) \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori, che indichiamo con σ_j, con $j = 1, 2, 3$, sono

$$\sigma_j = \lambda_j \cosh(1) + \lambda_j^2 \,\mathrm{senh}(1) \,, \qquad j = 1, 2, 3 \,,$$

in dettaglio

$$\sigma_1 = \cosh(1) + \mathrm{senh}(1) = e \,, \qquad \sigma_2 = -\cosh(1) + \mathrm{senh}(1) = -\frac{1}{e} \,, \qquad \sigma_3 = 0 \,.$$

Per il teorema spettrale, gli autovettori dell'operatore $\hat{\circledcirc}$ sono gli stessi dell'operatore $\hat{Y}$. Le componenti dei vettori che li rappresentano si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\left(I\lambda_j - Y \right) \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ v_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad j = 1, 2, 3 \,,$$

dove v_j^k è la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore v_j, con $j,k \in \{1,2,3\}$. Con il primo autovalore $\lambda_1 = 1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la prima e la terza equazione implicano $v_1^1 = v_1^3 = 0$, quindi $v_1^2 = 1$, ne consegue

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo autovettore si ha

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la seconda equazione dà $v_2^2 = 0$, mentre la prima e la terza equazione sono equivalenti e danno $v_1^1 = v_1^3$, quindi il vettore che rappresenta il secondo autovettore è

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, per il terzo autovettore

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

anche in questo caso, la seconda equazione dà $v_3^2 = 0$, mentre la prima e la terza equazione sono equivalenti e danno $v_1^1 = -v_1^3$, quindi il vettore che rappresenta il terzo autovettore è

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore unitario $\hat{G}$ è definito in uno spazio di Banach a tre dimensioni. La matrice che lo rappresenta rispetto alla base ortonormale $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ è

$$\hat{G} \overset{t}{\hookleftarrow} G = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottenga la matrice che rappresenta rispetto alla stessa base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ l'operatore $\hat{K}$, tale che

$$\hat{G} = e^{i\hat{K}}.$$

Che tipo di operatore è $\hat{K}$?

Soluzione del quinto problema

l'operatore $\hat{G}$ è unitario, come tale si può esprimere com esponenziale di un operatore hermitiano moltiplicato per l'unità immaginaria, quindi l'operatore $\hat{K}$ è hermitiano.
Procediamo come segue, diagonalizziamo l'operatore $\hat{G}$, ottenendo la matrice unitaria diagonalizzante, che chiamiamo V ed è tale che

$$\hat{G} \overset{g}{\hookleftarrow} G_d = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = V^\dagger G V \,,$$

dove $\{\gamma_k\}_{k=1}^3$ è l'insieme degli autovalori e $\{|g_k\rangle\}_{k=1}^3$ è quello degli autovettori, cosicché le tre equazioni agli autovalori sono

$$\hat{G}|g_k\rangle = \gamma_k |g_k\rangle \,, \qquad k = 1,2,3 \,.$$

Per il teorema ottico si ha che l'operatore hermitiano $\hat{K}$ ha gli stessi autovettori e gli autovalori dell'insieme $\{\eta_k\}_{k=1}^3$, che sono in relazione con quelli dell'operatore $\hat{G}$ tramite

$$\gamma_k = e^{i\eta_k} \qquad \Rightarrow \qquad \eta_k = -i\ln(\gamma_k) \,, \qquad k = 1,2,3 \,.$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(I\gamma - G) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} \gamma - 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \gamma - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & \gamma - 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\gamma - 1)\left[\left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = 0 \,,$$

quindi

$$\gamma_1 = 1 \,, \qquad \gamma_{2,3} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = e^{\pm i\pi/4} \,.$$

Otteniamo le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori come soluzioni dei sistemi omogeni

$$\begin{pmatrix} \gamma_k - 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \gamma_k - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & \gamma_k - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_k^1 \\ g_k^2 \\ g_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k = 1,2,3 \,,$$

dove g_k^j è la j-esima componente contro-variante del vettore che rappresenta il k-esimo autovettore, con $j,k \in \{1,2,3\}$. Per il primo si ha che le prime due equazioni implicano $g_1^1 = g_1^2 = 0$, quindi

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Per il secondo e il terzo autovettore si hanno

$$\begin{pmatrix} \pm i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \pm i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & e^{\pm i\pi/4} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{2,3}^1 \\ g_{2,3}^2 \\ g_{2,3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dalla terza equazione segue $v_{2,3}^3 = 0$, la prima e la seconda sono equivalenti e danno $v_{2,3}^2 = \pm i v_{2,3}^1$, quindi i vettori sono

$$g_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Allineando le componenti dei tre vettori in colonne si ottiene la matrice unitaria diagonalizzante V,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha

$$G_d = V^\dagger G V = \mathrm{diag}\left(1, e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}\right).$$

La rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{K}$ è

$$\hat{K} \overset{g}{\hookleftarrow} K_d = -i\ln(G_d) = \mathrm{diag}(-i\ln(\gamma_1), -i\ln(\gamma_2), -i\ln(\gamma_3)) = \mathrm{diag}(0, \pi/4, -\pi/4).$$

La rappresentazione rispetto alla base data è

$$\begin{aligned} \hat{K} \overset{t}{\hookleftarrow} K &= V K_d V^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi/\left(4\sqrt{2}\right) & -i\pi/\left(4\sqrt{2}\right) & 0 \\ -\pi/\left(4\sqrt{2}\right) & -i\pi/\left(4\sqrt{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -i\pi/4 & 0 \\ i\pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la funzione $\mathcal{V}(x) \in L(\mathbb{R})$, dove $L(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni sommabili in $\mathbb{R}$, soluzione dell'equazione differenziale

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1\right)\mathcal{V}(x) = x\theta(-x)e^x,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino di Heaviside.

Curiosità. Il simbolo $\mathcal{V}$ rappresenta il *Pokémon Unown* associato alla lettera V.

Soluzione del sesto Problema

Utilizziamo il metodo della trasformata di Fourier, calcolando la trasformata di Fourier di ambo i membri,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1\right)\mathcal{V}(x)\right] &= \mathscr{F}_k\left[x\theta(-x)e^x\right] \\ \left((ik)^2 - 2ik + 1\right)\mathscr{F}_k\left[\mathcal{V}\right] &= \mathscr{F}_k\left[x\theta(-x)e^x\right] \\ \left(-k^2 - 2ik + 1\right)\widetilde{\mathcal{V}}(k) &= \mathscr{F}_k\left[x\theta(-x)e^x\right], \end{aligned}$$

dove con $\widetilde{\Taurus}(k)$ indichiamo la trasformata di Fourier della funzione incognita. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione d'ingresso, sfruttando la funzione a gradino di Heaviside e l'integrazione per parti

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[x\theta(-x)e^x\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^x e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{x(1-ik)}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{xe^{x(1-ik)}}{1-ik}\right|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1-ik}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ik)}dx\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ik)}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ik)}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-ik)^2}\,.
\end{aligned}
$$

L'equazione algebrica per la trasformata di Fourier è

$$
\begin{aligned}
\left(-k^2-2ik+1\right)\widetilde{\Taurus}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-ik)^2} \\
(1-ik)^2\,\widetilde{\Taurus}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-ik)^2} \\
\widetilde{\Taurus}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-ik)^4}\,.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo l'anti-trasformata di Fourier

$$
\Taurus(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\widetilde{\Taurus}\right] = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(1-ik)^4}dk = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k+i)^4}dk\,,
$$

la funzione integranda ha un polo di ordine quattro in $k=-i$. Integriamo nel piano complesso k, usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui, chiudendo il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive se $x>0$ e negative se $x<0$, si ha

$$
\Taurus(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k+i)^4}dk = -i\begin{cases} -\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{ikx}}{(k+i)^4}, i\right] = -\dfrac{1}{3!}\,\dfrac{d^3}{dk^3}e^{ikx}\Big|_{k=i} = \dfrac{ix^3e^x}{6} & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}\,.
$$

Usando la funzione gradino di Heaviside, la soluzione è

$$
\Taurus(x) = \frac{x^3\theta(-x)e^x}{6}\,.
$$