Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 14 dicembre 2012

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$I = \int_A \frac{\cosh(z)}{1-z^6} dz\,,$$

dove $A = \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ è il semiasse immaginario positivo.

. . . .

Soluzione
Posto $z = i\,y$ e sfruttando la simmetria dell'integranda, si ha

$$I = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{1+y^6}dy = \frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{1+y^6}dy\,.$$

L'integranda ha i sei poli semplici

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/6}\,, \qquad z_k^* = e^{-i\pi(1+2k)/6}\,, \qquad k = 0,1,2\,.$$

Grazie al lemma di Jordan e il teorema dei residui si hanno

$$\frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iy}}{1+y^6}dy = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{1+z^6}, z_k\right]$$
$$\frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iy}}{1+y^6}dy = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{1+z^6}, z_k^*\right]\,.$$

Il residuo k-esimo è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\pm iz}}{1+z^6}, z_k^{(*)}\right] = \lim_{z\to z_k^{(*)}} \frac{e^{\pm iz}}{1+z^6}(z - z_k^{(*)}) = \frac{e^{\pm i z_k^{(*)}}}{6(z_k^{(*)})^5}\,.$$

L'integrale completo

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{\pi}{12}\sum_{k=0}^{2}\left[e^{iz_k}e^{-5i\pi(1+2k)/6} - e^{-iz_k^*}e^{5i\pi(1+2k)/6}\right] \\
&= -\frac{\pi}{12}\sum_{k=0}^{2} e^{-\mathrm{Im}(z_k)}\left[e^{i\mathrm{Re}(z_k)}e^{-5i\pi(1+2k)/6} - e^{-i\mathrm{Re}(z_k)}e^{5i\pi(1+2k)/6}\right] \\
&= -\frac{i\pi}{6}\sum_{k=0}^{2} e^{-\mathrm{Im}(z_k)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_k) - 5\pi(1+2k)/6\right] \\
&= -\frac{i\pi}{6}\left\{e^{-\mathrm{Im}(z_0)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_0)-5\pi/6\right] + e^{-\mathrm{Im}(z_1)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_1)-\pi/2\right] + e^{-\mathrm{Im}(z_2)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_2)-\pi/6\right]\right\}\,,
\end{aligned}$$

ma avendo che:

$$\mathrm{Im}(z_0) = 1/2 \qquad\qquad \mathrm{Re}(z_0) = \sqrt{3}/2$$

$$\mathrm{Im}(z_1) = 1 \qquad\qquad \mathrm{Re}(z_1) = 0$$

$$\mathrm{Im}(z_2) = 1/2 \qquad\qquad \mathrm{Re}(z_2) = -\sqrt{3}/2\,,$$

si ha, in definitiva:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{i\pi}{6}\Big\{e^{-\mathrm{Im}(z_0)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_0) - 5\pi/6\right] + e^{-\mathrm{Im}(z_1)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_1) - \pi/2\right] + e^{-\mathrm{Im}(z_2)}\sin\left[\mathrm{Re}(z_2) - \pi/6\right]\\
&= -\frac{i\pi}{6}\Big\{e^{-1/2}\left[\sin\left(\sqrt{3}/2 - 5\pi/6\right) + \sin\left(-\sqrt{3}/2 - \pi/6\right)\right] - e^{-1}\Big\}\\
&= \frac{i\pi}{6\,e}\Big\{e^{1/2}\left[\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}/2\right) + \cos\left(\sqrt{3}/2\right)\right] + 1\Big\}\\
&= \frac{i\pi}{6\,e}\left[\sqrt{3e}\sin\left(\sqrt{3}/2\right) + \sqrt{e}\cos\left(\sqrt{3}/2\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si calcoli l'integrale in valore principale

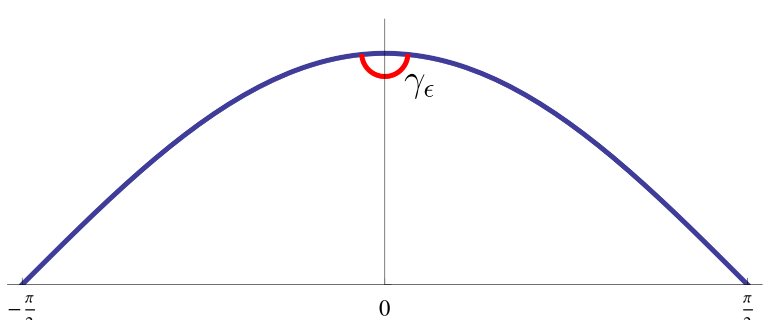
$$J = \mathrm{Pr}\!\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\,,$$

dove γ è un percorso sinusoidale dato da

$$\gamma = \big\{z : \mathrm{Im}(z) = \cos[\mathrm{Re}(z)], \mathrm{Re}(z) \in [-\pi/2, \pi/2]\big\}\,.$$

. . . .

Soluzione
L'integrale si estende sul percorso mostrato in figura. L'unica singolarità presente su γ è nel punto $z = i$. Consideriamo il cammino modificato, γ', che aggira la singolarità da sotto, con un archetto γ_ϵ di raggio infinitesimo e centro $z = i$.



L'integrale su γ', poiché l'integranda non ha singolarità sotto la stessa curva, coincide con quello lungo il segmento reale $[-\pi/2, \pi/2]$, ovvero

$$\int_{\gamma'} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Pr}\!\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{1+z^2}\,.$$

Si ha che l'integrale sul segmento reale è

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{atan}(\pi/2)\,.$$

Per l'integrale su γ_ϵ si ha invece

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{dz}{z-i}}_{i\pi} - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{dz}{z+i}}_{0}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Quindi l'integrale in valore principale è

$$J = \mathrm{Pr}\!\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = 2\,\mathrm{atan}(\pi/2) - \frac{\pi}{2}\,.$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si determinino i coefficienti C_{-1}, C_{-2} e C_{-3} della serie di Laurent in $z_0 = 1$ della funzione

$$f(z) = e^z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

e si calcoli l'integrale

$$T = \oint_{|z|=2} z^2 f(z) dz\,.$$

. . . .

Soluzione
Lo sviluppo di Laurent si ottiene considerando gli sviluppi dei due fattori in $z_0 = 1$. Per il seno si ha:

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-2m-1}}{(2m+1)!}(-1)^m\,,$$

mentre per l'esponenziale

$$e^z = e\, e^{z-1} = e\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}\,.$$

La funzione completa

$$f(z) = e \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{k-2m-1}}{(2m+1)!k!}(-1)^m \,,$$

contiene due somme. Per ottenere il coefficiente n-esimo della serie di Laurent, si vincola uno dei due indici di somma, come:

$$k - 2m - 1 = n \qquad \Rightarrow \qquad k = 2m + 1 + n \,.$$

Quindi per $n = -1, -2, -3$ si hanno

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \{k = 2m\} = e \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!(2m)!} \,, \\ C_{-2} &= \{k = 2m-1\} = e \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!(2m-1)!} \,, \\ C_{-3} &= \{k = 2m-2\} = e \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!(2m-2)!} \,. \end{aligned}$$

L'integrale T si risolve con il teorema dei residui. Nel cammino d'integrazione cade la sola singolarità $z_0 = 1$. Poiché

$$z^2 = (z-1)^2 + 2(z-2) + 1 \,,$$

l'integrale sarà data dalla stessa combinazione di coefficienti di Laurent, cioè:

$$\begin{aligned} T &= 2i\pi \left[C_{-3} + 2C_{-2} + C_{-1}\right] \\ &= 2i\pi e \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!(2m)!}(1 + 4m + 2m(2m-1)) + 2i\pi \\ &= 2i\pi e \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(4m^2 + 2m + 1)}{(2m+1)!(2m)!} \,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Si dimostri che $\forall\, f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$

$$||f|| = ||\tilde{f}|| \,, \qquad \text{con: } \tilde{f}(k) = \mathcal{F}_k[f] \,.$$

La norma della funzione è definita, in $L^2(-\infty, \infty)$, come

$$||f|| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \,.$$

Data l'equazione integrale

$$u''(x) + u'(x) + u(x) = f'(x)$$

con $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ si verifichi la maggiorazione

$$||u|| \leq ||f|| \, .$$

. . . .

Soluzione

Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned} ||\tilde{f}||^2 = (\tilde{f}, \tilde{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f^*(x') f(x) e^{-ik(x-x')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f^*(x') f(x) \delta(x - x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = (f, f) = ||f||^2 \, . \end{aligned}$$

Facendo le TF dell'equazione integrale

$$-k^2 \tilde{u}(k) + ik\tilde{u}(k) + \tilde{u}(k) = ik\tilde{f}(k) \, ,$$

da cui

$$\tilde{u}(k) = \frac{ik}{1 - k^2 + ik} \tilde{f}(k) \, .$$

Calcolo la norma quadra di ambo i membri

$$\begin{aligned} ||u||^2 = (\tilde{u}, \tilde{u}) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{k^2}{(1 - k^2)^2 + k^2} dk \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \underbrace{\max \left[\frac{k^2}{(1 - k^2)^2 + k^2} \right]}_{=1} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = (\tilde{f}, \tilde{f}) = ||\tilde{f}||^2 = ||f||^2 \, . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 5 (5 punti)

Risolvere formalmente l'equazione integro-differenziale

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \int_{-\infty}^{\infty} C(x - y)\phi(y) dy = f(x) \, .$$

Considerare esplicitamente la soluzione nel caso in cui, sia il nucleo che la funzione d'ingresso coincidano con una delta di Dirac, cioè:

$$C(x) = f(x) = \delta(x) \, .$$

. . . .

Soluzione
Facendo la TF di ambo i membri si ha

$$k^2\tilde{\phi}(k) + \sqrt{2\pi}\,\tilde{C}(k)\tilde{\phi}(k) = -\tilde{f}(k)$$

quindi

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{-\tilde{f}(k)}{k^2 + \sqrt{2\pi}\,\tilde{C}(k)}\,.$$

La soluzione si ottiene come

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\tilde{f}(k)e^{ikx}}{k^2 + \sqrt{2\pi}\,\tilde{C}(k)}dk\,.$$

Nel caso delle delta di Dirac avremo

$$\phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+1}dk = -\frac{1}{2}e^{-|x|}\,.$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\,,$$

- classificare la matrice;
- calcolare autovalori e autovettori;
- calcolare $\ln(A)$.

. . . .

Soluzione
La matrice A è unitaria, infatti

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & e^{-i\pi/3} & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

L'equazione secolare è

$$\det\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 - t & 0 & 1/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} - t & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 - t \end{pmatrix} = \left(e^{i\pi/3} - t\right)\left[\left(\sqrt{3}/2 - t\right)^2 + 1/4\right]\,,$$

gli autovalori

$$t_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = e^{i\pi/6}\,, \quad t_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = e^{-i\pi/6}\,, \quad t_3 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = e^{i\pi/3}\,.$$

Gli autovettori 1 e 2 sono

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \beta_{1,2} \\ \gamma_{1,2} \end{pmatrix} = t_{1,2} \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \beta_{1,2} \\ \gamma_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= 1 \\ \beta_{1,2} &= 0 \\ \gamma_{1,2} &= \alpha(2t-\sqrt{3}) = 2t_{1,2}-\sqrt{3} = \pm i\,, \end{aligned}$$

mentre per il terzo si ha

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = t_3 \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0 \\ \beta_3 &= 1 \\ \gamma_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Da cui

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{aligned} \ln(A) &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi/6 & 0 & 0 \\ 0 & -i\pi/6 & 0 \\ 0 & 0 & i\pi/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\pi/6\sqrt{2} & -i\pi/6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i\pi/3 \\ -\pi/6\sqrt{2} & -\pi/6\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi/6 \\ 0 & i\pi/3 & 0 \\ -\pi/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infatti:

$$
\begin{aligned}
\ln(A)u_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi/6 \\ 0 & i\pi/3 & 0 \\ -\pi/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm i\pi/6 \\ 0 \\ -\pi/6 \end{pmatrix} = \frac{\pm i\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix} = \pm \frac{i\pi}{6}\, u_{1,2} = \ln(t_{1,2})\, u_{1,2}\,,
\end{aligned}
$$

mentre, per il terzo:

$$
\begin{aligned}
\ln(A)u_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi/6 \\ 0 & i\pi/3 & 0 \\ -\pi/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \ln(t_3)\, u_3\,.
\end{aligned}
$$