Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 13 giugno 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che gli autovalori di un operatore $\hat{\text{🝾}}$ definito nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N appartengono al disco chiuso $\left\{z : |z| \leq \left\|\hat{\text{🝾}}\right\|\right\} \subset \mathbb{C}$.

Strumenti
• Operatore risolvente.
• Serie di operatori.

Curiosità. Il simbolo 🝾 indica il pianeta nano *50000 Quaoar*. È uno dei cosiddetti *oggetti transnettuniani*, sono corpi celesti facenti parte del sistema solare e aventi orbite che si estendono per la maggior parte oltre l'orbita di Nettuno.

Soluzione del primo problema

L'operatore risolvente $\hat{\text{🝾}}_\lambda = \left(\lambda \hat{I} - \hat{\text{🝾}}\right)^{-1}$ può, almeno formalmente, essere espresso come somma di una serie geometrica. Infatti, per $\lambda \neq 0$, si ha

$$\hat{\text{🝾}}_\lambda = \left(\lambda \hat{I} - \hat{\text{🝾}}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}\right)^{-1},$$

dimostriamo che l'operatore $\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}\right)^{-1}$ è la somma della serie geometrica di ragione $\lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}$, cioè

$$\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\text{🝾}}^k}{\lambda^k},$$

che converge se la norma della ragione è strettamente minore dell'unità, ovvero se

$$0 \leq \left\|\lambda^{-1}\hat{\text{🝾}}\right\| = \frac{\left\|\hat{\text{🝾}}\right\|}{|\lambda|} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |\lambda| > \left\|\hat{\text{🝾}}\right\|.$$

Indichiamo con $\hat{B}$ l'operatore somma,

$$\hat{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\text{🝾}}^k}{\lambda^k},$$

che, ribadiamo, esiste $\forall\,\lambda$, tale che: $|\lambda| > \left\|\hat{\mathcal{Q}}\right\|$. Moltiplichiamo, prima da sinistra, poi destra, ambo i membri dell'identità precedente per l'operatore $\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right)$,

$$\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right)\hat{B} = \left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{x^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \hat{I}\,,$$

$$\hat{B}\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k}\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \hat{I}\,,$$

queste due identità implicano che l'operatore $\hat{B}$ è l'inverso dell'operatore $\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{\mathcal{Q}}\right)$ ed è, quindi, l'operatore risolvente di $\hat{\mathcal{Q}}$, cioè

$$\hat{\mathcal{Q}}_\lambda = \hat{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k}\,.$$

Questo significa che l'operatore risolvente esiste quando la serie converge, quindi per valori di λ, tali che $|\lambda| > \left\|\hat{\mathcal{Q}}\right\|$ e inoltre, in questo caso la sua norma è finita. Si ha infatti la limitazione

$$0 \le \left\|\hat{\mathcal{Q}}_\lambda\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{\hat{\mathcal{Q}}^{k}}{\lambda^k}\right\| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\|\hat{\mathcal{Q}}\right\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{1 - \left\|\hat{\mathcal{Q}}\right\|/|\lambda|} < \infty\,.$$

Ne consegue che l'insieme risolvente dell'operatore $\hat{\mathcal{Q}}$, $\rho\left(\hat{\mathcal{Q}}\right)$, che contiene i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$, per i quali esiste ed è limitato l'operatore risolvente è

$$\rho\left(\hat{\mathcal{Q}}\right) = \left\{\lambda : |\lambda| > \|\hat{A}\|\right\}\,.$$

Lo spettro $\sigma\left(\hat{\mathcal{Q}}\right)$ dell'operatore $\hat{\mathcal{Q}}$ è il complementare del suo insieme risolvente in $\mathbb{C}$, cioè

$$\sigma\left(\hat{\mathcal{Q}}\right) = \mathbb{C}\backslash\rho\left(\hat{\mathcal{Q}}\right) = \left\{\lambda : |\lambda| \le \left\|\hat{\mathcal{Q}}\right\|\right\}\,,$$

che il disco chiuso dato dal problema. Poiché, in generale, gli autovalori sono elementi dello spettro dell'operatore essi appartengono al disco chiuso $\sigma\left(\hat{\mathcal{Q}}\right)$, abbiamo così dimostrato quanto richiesto.

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore

$$\hat{\mathcal{O}} = e^{i\hat{\sigma}_1}\hat{\sigma}_2\,,$$

è definito nello spazio di Hilbert a due dimensioni E_2 in termini degli operatori di Pauli $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$.
Si determinino: lo spettro discreto e le rappresentazioni degli autovettori dell'operatore $\hat{\mathcal{O}}$, rispetto alla base ortonormale degli autovettori del terzo operatore di Pauli.

Strumenti

- Algebra degli operatori di Pauli.

Curiosità. Il simbolo $\mathcal{O}$ indica *90482 Orcus* un corpo celeste degli *oggetti transnettuniani* descritti nel primo problema.

Soluzione del secondo problema

Sfruttando le proprietà degli operatori di Pauli di essere al contempo hermitiani e unitari, quindi tali che: $\hat{\sigma}_j^2 = \hat{I}$, per ogni $j \in \{1,2,3\}$, l'operatore esponenziale si $e^{i\hat{\sigma}_1}$ può essere scritto come

$$e^{i\hat{\sigma}_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\hat{\sigma}_1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\hat{\sigma}_1)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\hat{\sigma}_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} + i\hat{\sigma}_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \hat{I}\cos(1) + i\hat{\sigma}_1\,\mathrm{sen}(1)\,,$$

dove abbiamo usato l'identità: $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{I}$ per tutte le potenze pari. Ne consegue che l'operatore $\hat{🝾}$ è

$$\hat{🝾} = e^{i\hat{\sigma}_1}\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2 \cos(1) + i\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \operatorname{sen}(1) = \hat{\sigma}_2 \cos(1) - \hat{\sigma}_3 \operatorname{sen}(1)\,,$$

dove per il prodotto $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$ si è usata la relazione

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk}\hat{I} + i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\,, \qquad \forall\, j,k,m \in \{1,2,3\}\,,$$

da cui si ha: $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = i\hat{\sigma}_3$.
La matrice che rappresenta l'operatore $\hat{🝾}$ rispetto alla base degli autovettori di $\hat{\sigma}_3$ è

$$\hat{🝾} \hookleftarrow 🝾 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cos(1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(1) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(1) & -i\cos(1) \\ i\cos(1) & \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix}.$$

Otteniamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det\big(I\alpha - 🝾\big) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} \alpha + \operatorname{sen}(1) & i\cos(1) \\ -i\cos(1) & \alpha - \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} &= 0 \\ \alpha^2 - \operatorname{sen}^2(1) - \cos^2(1) &= 0 \\ \alpha^2 &= 1\,, \end{aligned}$$

abbiamo i due autovalori $\alpha_\pm = \pm 1$. Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori corrispondenti, che indichiamo con $|a_+\rangle$ e $|a_-\rangle$ e verificano le equazioni agli autovalori

$$\hat{🝾}|a_\pm\rangle = \alpha_\pm |a_\pm\rangle = \pm|a_\pm\rangle\,,$$

rispetto alla base degli autovettori di $\hat{\sigma}_3$, si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{aligned} \big(I\alpha_\pm - 🝾\big)\, a_\pm &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_\pm + \operatorname{sen}(1) & i\cos(1) \\ -i\cos(1) & \alpha_\pm - \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $a_\pm^j$ è la j-esima componente contro-variante, con $j = 1,2$, del vettore $a_\pm$.
Poniamo $a_\pm^1 = \alpha$, si hanno i sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} \pm 1 + \operatorname{sen}(1) & i\cos(1) \\ -i\cos(1) & \pm 1 - \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ a_\pm^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima equazione si ottengono, in funzione di α, le seconde componenti contro-varianti

$$a_\pm^2 = i\,\frac{\pm 1 + \operatorname{sen}(1)}{\cos(1)}\,\alpha\,,$$

da cui si hanno le espressioni complete dei vettori

$$a_\pm = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i\,(\pm 1 + \operatorname{sen}(1))\,/\cos(1) \end{pmatrix}.$$

Usiamo il grado di libertà del parametro α per normalizzare all'unità,

$$a_\pm = \frac{\cos(1)}{\sqrt{2\,(1 \pm \operatorname{sen}(1))}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\,(\pm 1 + \operatorname{sen}(1))\,/\cos(1) \end{pmatrix}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si dimostri che per ogni proiettore $\hat{♇}$ definito in uno spazio di Hilbert a N dimensioni E_N, si ha

$$\hat{♇}^{\,1/n} = \hat{♇}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Strumenti
• Rappresentazione spettrale.

Curiosità. Il simbolo ♇ indica il pianeta nano *Plutone*, è un corpo celeste degli *oggetti transnettuniani* descritti nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

Il proiettore $\hat{\mathbb{P}}$ è diagonalizzabile in quanto hermitiano, inoltre, essendo idempotente, i sui autovalori sono o nulli o unitari. Le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{\mathbb{P}}\,|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori, con $\lambda_k \in \{0,1\}$, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}$ e $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovettori, che, poiché l'operatore è normale, sono ortonormali. La rappresentazione spettrale è

$$\hat{\mathbb{P}} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \hat{Q}_k\,,$$

dove $\{\hat{Q}_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme dei proiettori ortogonali e tali da coprire tutto lo spazio caratteristici del proiettore $\hat{\mathbb{P}}$, che sono dati dai prodotti *ket-bra* degli autovettori ortonormali, cioè: $\{\hat{Q}_k = |u_k\rangle\langle u_k|\}_{k=1}^N$. L'operatore radice n-esima $\hat{\mathbb{P}}^{1/n}$, in virtù del teorema spettrale ha rappresentazione

$$\hat{\mathbb{P}}^{1/n} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{1/n} \hat{Q}_k\,,$$

se ne deduce che ha gli stessi autovettori del proiettore $\hat{\mathbb{P}}$ e che gli autovalori sono le radici n-esime degli omologhi sempre del proiettore $\hat{\mathbb{P}}$. Quindi, le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{\mathbb{P}}^{1/n} |u_k\rangle = \lambda_k^{1/n} |u_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Consideriamo la rappresentazione spettrale dell'operatore $\hat{\mathbb{P}}^{1/n}$ sfruttando la condizione sugli autovalori: $\lambda_k \in \{0,1\}$, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}$, che implica: $\lambda_k^{1/n} = \lambda_k$, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}$, si ha

$$\hat{\mathbb{P}}^{1/n} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{1/n} \hat{Q}_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \hat{Q}_k = \hat{\mathbb{P}}\,.$$

Abbiamo dimostrato così quanto richiesto dal problema.

Quarto problema (punteggio massimo: 7/30)

Per ogni $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, tale che $\|f\| = 1$, si definiscono gli scarti quadratici medi

$$\Delta f = \sqrt{(xf, xf)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad \Delta \tilde{f} = \sqrt{(k\tilde{f}, k\tilde{f})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk\right)^{1/2},$$

dove $\tilde{f}(k)$ è la trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]\,.$$

Si dimostri la diseguaglianza

$$\Delta f\, \Delta \tilde{f} \geq \frac{1}{2}.$$

Strumenti

- Proprietà delle trasformate di Fourier.
- Identità di Parseval.
- Diseguaglianza di Schwarz.

Soluzione del quarto problema

Partiamo dal prodotto dei quadrati degli scarti quadratici medi

$$
\begin{aligned}
(\Delta f)^2\left(\Delta\tilde{f}\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} k^2|\tilde{f}(k)|^2 dk\right)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |ik\tilde{f}(k)|^2 dk\right), \qquad \text{usiamo: } ik\tilde{f}(k)=\mathscr{F}_k\left[f'\right]\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}_k\left[f'\right]\right|^2 dk\right)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\mathscr{F}_k\left[f'\right],\mathscr{F}_k\left[f'\right]\right), \qquad \text{per l'identità di Parseval: } \left(\mathscr{F}_k\left[f'\right],\mathscr{F}_k\left[f'\right]\right)=(f',f')\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx\right) = (x|f|,x|f|)\left(|f'|,|f'|\right), \qquad \text{per la diseguaglianza di Schwarz,}\\
&= (x|f|,x|f|)\left(|f'|,|f'|\right) \ge \left|\left(x|f|,|f'|\right)\right|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)||f'(x)|dx\right)^2,
\end{aligned}
$$

dove, è importante ribadirlo, la diseguaglianza di Schwarz è stata usata per i moduli delle funzioni, al fine di massimizzarne l'effetto. L'integranda può essere manipolata, usando le identità del modulo della funzione con quello della sua complessa coniugata e della parte reale con la metà della somma della funzione e della sua complessa coniugata, si ottiene

$$
\begin{aligned}
x|f(x)||f'(x)| = x|f^*(x)||f'(x)| = x|f^*(x)f'(x)| \ge x\mathrm{Re}\left(f^*(x)f'(x)\right) &= \frac{x}{2}\left(f^*(x)f'(x)+f(x)f'^*(x)\right)\\
&= \frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(f^*(x)f(x)\right) = \frac{x}{2}\frac{d}{dx}|f(x)|^2,
\end{aligned}
$$

cioè

$$
x|f(x)||f'(x)| \ge \frac{x}{2}\frac{d}{dx}|f(x)|^2 .
$$

Con questa risultato, la diseguaglianza diventa

$$
(\Delta f)^2\left(\Delta\tilde{f}\right)^2 \ge \left(\int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)||f'(x)|dx\right)^2 \ge \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\underbrace{x|f(x)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2=1}\right)^2,
$$

quindi, avendo sfruttato la sommabilità della funzione $|f(x)|$, che implica $|f(x)|=o(1/x)$ e $x|f(x)|^2=o(1/x)$ per $|x|\to\infty$ e la normalizzazione all'unità, estraendo la radice quadrata dalle precedente diseguaglianza si arriva a quella richiesta,

$$
\Delta f\,\Delta\tilde{f} \ge \frac{1}{2}.
$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si risolva l'equazione integrale

$$
u(x) = \phi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}u(y)dy + e^{-|x|},
$$

discutendo la dipendenza della soluzione $u(x)\in L^2(\mathbb{R})$ dal parametro $\phi\in\mathbb{R}$.

Strumenti

• Teorema della convoluzione.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Facciamo la trasformata di Fourier dell'equazione, osservando che l'integrale è la convoluzione della soluzione $u(x)$ e della funzione esponenziale $g(x) = e^{-|x|}$, che rappresenta anche la funzione termine noto. Si ha

$$\mathscr{F}_k[u] = \phi\mathscr{F}_k[(g*u)(x)] + \mathscr{F}_k[g]$$
$$\tilde{u}(k) = \sqrt{2\pi}\,\phi\,\tilde{g}(k)\tilde{u}(k) + \tilde{g}(k),$$

dove abbiamo posto

$$\tilde{u}(k) = \mathscr{F}_k[u]\,, \qquad \tilde{g}(k) = \mathscr{F}_k[g] = \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]$$

e usato il teorema della convoluzione

$$\mathscr{F}_k[(g*u)(x)] = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[u]\mathscr{F}_k[g] = \sqrt{2\pi}\,\tilde{u}(k)\tilde{g}(k).$$

La trasformata di Fourier dell'esponenziale dell'opposto del modulo è

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-x(ik-1)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(ik+1)}dx\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2}.$$

Risolviamo l'equazione algebrica ottenuta per la trasformata di Fourier della soluzione e usiamo l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{g}(k)$, si ha

$$\tilde{u}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{1-\sqrt{2\pi}\phi\,\tilde{g}(k)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1-2\phi}.$$

L'anti-trasformata di Fourier è

$$u(x) = \mathscr{F}_{-x}[\tilde{u}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+1-2\phi}dk.$$

Consideriamo i due casi:

$$\text{i)}\quad 1-2\phi < 0 \quad\Rightarrow\quad \phi > \frac{1}{2};$$
$$\text{ii)}\quad 1-2\phi > 0 \quad\Rightarrow\quad \phi < \frac{1}{2}.$$

Per $\phi > 1/2$ riscriviamo l'integrale come

$$u(x) = \mathscr{F}_{-x}[\tilde{u}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+1-2\phi}dk = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\phi-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k-\sqrt{2\phi-1}}dk - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k+\sqrt{2\phi-1}}dk\right).$$

Calcoliamo i due integrali, che sono in valore principale, usando la formula di Sokhotski-Plemelj, si hanno

$$\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\sqrt{2\phi-1}}dk = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\sqrt{2\phi-1}+i\epsilon}dk + i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}}.$$

I valori dell'integrale a secondo membro si ottengono con il lemma di Jordan e il teorema dei residui, in funzione del segno della x, si hanno i due casi

$$\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\sqrt{2\phi-1}+i\epsilon}dk = \begin{cases} -2i\pi\mathrm{Res}\left[e^{ikx},\mp\sqrt{2\phi-1}\right] + i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}} = -i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}} & x<0 \\ 2i\pi\mathrm{Res}\left[e^{ikx},\mp\sqrt{2\phi-1}\right] + i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}} = i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}} & x>0 \end{cases},$$

ovvero,

$$\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\sqrt{2\phi-1}}dk = \mathrm{Segno}[x]\,i\pi e^{\mp ix\sqrt{2\phi-1}}.$$

Sostituendo nella precedente espressione di $u(x)$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\phi-1}} \text{Segno}[x]\, i\pi \left(e^{ix\sqrt{2\phi-1}} - e^{-ix\sqrt{2\phi-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\phi-1}} \text{Segno}[x]\, i \left(2i \,\text{sen}\left(x\sqrt{2\phi-1}\right)\right),$$

cioè

$$u(x) = -\frac{\text{Segno}[x]\,\text{sen}\left(x\sqrt{2\phi-1}\right)}{\sqrt{2\phi-1}},$$

per $\phi > 1/2$. In questo caso è possibile considerare anche il valore $\phi = 1/2$, facendo il limite $\phi \to 1/2$ dell'espressione ottenuta, assumendo $x \neq 0$. Si ha

$$u(x) = \lim_{\phi\to 1/2}\left(-\frac{\text{Segno}[x]\,\text{sen}\left(x\sqrt{2\phi-1}\right)}{\sqrt{2\phi-1}}\right) = -\text{Segno}[x]\, x\,.$$

Questa funzione è la ben nota trasformata di Fourier del polo doppio nell'origine $\sqrt{2/\pi}/k^2$.
Se, invece $\phi < 1/2$, scriviamo l'integrale come

$$u(x) = \mathscr{F}_{-x}[\tilde{u}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2+1-2\phi} dk = \frac{1}{2i\pi\sqrt{1-2\phi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - i\sqrt{1-2\phi}} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + i\sqrt{1-2\phi}} dk\right).$$

Le funzioni integrande hanno un polo semplice puramente immaginario, nel semipiano superiore la prima, inferiore la seconda. Usiamo, anche in questo caso, dipendentemente dal segno della x, il lemma di Jordan e il teorema dei residui,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\phi}} \begin{cases} -\text{Res}\left[e^{ikx}, -i\sqrt{1-2\phi}\right] = e^{x\sqrt{1-2\phi}} & x < 0 \\ \text{Res}\left[e^{ikx}, i\sqrt{1-2\phi}\right] = e^{-x\sqrt{1-2\phi}} & x > 0 \end{cases},$$

quindi, per $\phi < 1/2$ la soluzione è

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\phi}} e^{-|x|\sqrt{1-2\phi}}.$$

La soluzione completa può essere data dalla combinazione delle precedenti con funzioni a gradino di Heaviside, cioè

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-2\phi|}}\left(-\theta\left(\phi - \frac{1}{2}\right)\text{Segno}[x]\,\text{sen}\left(x\sqrt{2\phi-1}\right) + \theta\left(-\phi+\frac{1}{2}\right)e^{-|x|\sqrt{1-2\phi}}\right).$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la funzione $g(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ soluzione dell'equazione integrale

$$g(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)\, y\, g(y)\, dy + x\,,$$

discutendone esistenza e unicità in funzione del parametro λ.

Soluzione del sesto Problema

Il nucleo è separabile, infatti usando le formule di somma della funzione coseno si ha

$$g(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\,\text{sen}(y))\, y\, g(y) dy + x = \lambda\sum_{k=1}^{2} M_k(x)\int_{-\pi}^{\pi} N_k(y) g(y) dy + x\,,$$

con

$$N_1(x) = x\cos(x)\,,\qquad N_2(x) = x\,\text{sen}(x)\,,\qquad M_1(x) = \cos(x)\,,\qquad M_2(x) = \text{sen}(x)\,.$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione integrale per $N_j(x)$, per ogni $j \in \{1,2\}$ e integriamo in dx nell'intervallo $(-\pi,\pi)$, si ha

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_j(x)g(x)dx}_{C_j} = \lambda \sum_{k=1}^{4} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_j(x)M_k(x)dx}_{A_{jk}} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_k(x)g(x)dx}_{C_k} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_j(x)x\,dx}_{B_j}, \qquad \forall\, j \in \{1,2\},$$

indicando con C_j e B_j i j-esimi elementi dei vettori 2×1, C e C, e con A_{jk} l'elemento della j-esima riga e della k-esima colonna della matrice 2×2, A, la precedente identità può essere posta nella forma vettoriale 2×1,

$$(I-\lambda A)\,C = B\,.$$

Rappresenta un sistema lineare, dove la matrice dei coefficienti è $I-\lambda A$, mentre C e B sono i vettori delle incognite e del termine noto.
Calcoliamo i coefficienti della matrice A,

$$A_{11} = \int_{0}^{\pi} N_1(x)M_1(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos^2(x)dx = 0\,, \qquad \text{(la funzione integranda è dispari)},$$

$$A_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} N_1(x)M_2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{-\frac{x\cos(2x)}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=-\pi/4} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)dx}_{=0}\Bigg) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$A_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} N_2(x)M_1(x)dx = A_{12} = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$A_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} N_2(x)M_2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}^2(x)dx = 0 \qquad \text{(la funzione integranda è dispari)}.$$

Gli elementi del vettore termine noto B sono

$$B_1 = \int_{-\pi}^{\pi} xN_1(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(x)dx = \underbrace{x^2\,\mathrm{sen}(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - 2\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)dx$$

$$= \underbrace{2x\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=-4\pi} - 2\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx}_{=0} = -4\pi\,,$$

$$B_2 = \int_{-\pi}^{\pi} xN_2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{sen}(x)dx = 0 \qquad \text{(la funzione integranda è dispari.)}$$

Il sistema completo assume la forma

$$(I-\lambda A)\,C = B$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & -\pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda\pi/2 \\ \lambda\pi/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Richiediamo l'esistenza e l'unicità della soluzione, verificando che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero, abbiamo

$$\det(I-\lambda A) = \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda\pi/2 \\ \lambda\pi/2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2\pi^2}{4} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}\,.$$

Ne consegue che, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\pi, \pi\}$, la soluzione del sistema è

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(I-\lambda A)} \det\begin{pmatrix} -4\pi & \lambda\pi/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\det(I-\lambda A)} \det\begin{pmatrix} 1 & -4\pi \\ \lambda\pi/2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{16\pi}{4-\lambda^2\pi^2} \\ \\ \dfrac{8\lambda\pi^2}{4-\lambda^2\pi^2} \end{pmatrix}.$$

La funzione cercata, soluzione dell'equazione integrale si ottiene sommando alla funzione termine noto x la combinazione delle funzioni dell'insieme $\{M_k\}_{k=1}^2$ con gli elementi del vettore soluzione C, multiplicati per λ, cioè

$$g(x) = \lambda \sum_{k=1}^{2} C_k M_k(x) + x = 8\lambda\pi \frac{-2\cos(x) + \pi\lambda\,\mathrm{sen}(x)}{4-\lambda^2\pi^2} + x\,.$$