Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello invernale - 13 gennaio 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo averne definito il dominio di convergenza $D \subset \mathbb{N}$, si ottenga, in funzione di $n \in D$, l'espressione degli integrali

$$\rightsquigarrow_n = \oint_{|z-in|=n+1} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} dz\,,$$

dove $\Gamma(z)$ e la funzione gamma di Eulero.

Curiosità. Il simbolo $\rightsquigarrow$ è quello associato alla lettera "F" dell'"Alfabeto Fantascientifico Personalizzato" generato da *ChatGPT* in risposta alla domanda "Sapresti generare un alfabeto?", a seguito di una breve serie di altre domande riguardanti alfabeti tratti da racconti di fantascienza.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è la derivata logaritmica della funzione gamma di Eulero, possiamo applicare il teorema dell'indice, ricordando che la funzione gamma di Eulero non ha zeri e ha come uniche singolarità i poli semplici della successione $\{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$.
I percorsi d'integrazione sono le circonferenze centrate in $z = in$ e aventi raggi $n+1$, con $n \in \mathbb{N}$. Il dominio di convergenza D è l'insieme dei numeri naturali tali che l'n-esima circonferenza, con $n \in D$, abbia intersezione vuota con la successione dei poli semplici $\{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$. In generale, l'$n$-esima circonferenza interseca l'asse reale in due punti simmetrici rispetto all'origine, cioè

$$\left\{z : z = in + (n+1)e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\right\} \cap \mathbb{R} = \{-x, x\}\,,$$

con

$$x = (n+1)\cos\left(\bar{\theta}\right)\,,$$

dove la fase $\bar{\theta}$ è tale che, $n + (n+1)\,\mathrm{sen}\left(\bar{\theta}\right) = 0$, cioè si ha la parte immaginaria nulla. Il coseno della fase $\bar{\theta}$ è

$$\cos\left(\bar{\theta}\right) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\left(\bar{\theta}\right)} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}}\,,$$

quindi

$$x = \sqrt{2n+1}\,.$$

La condizione $\{-x, x\} \cap \{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty} = \varnothing$ equivale a: $x \notin \mathbb{N}$, ovvero dovremmo escludere tutti i numeri naturali n' tali che $2n'+1$, che è dispari, sia un quadrato perfetto. Ad avere quadrato dispari sono solo i naturali dispari. Infatti, il quadrato del numero dispari $2m+1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, è

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

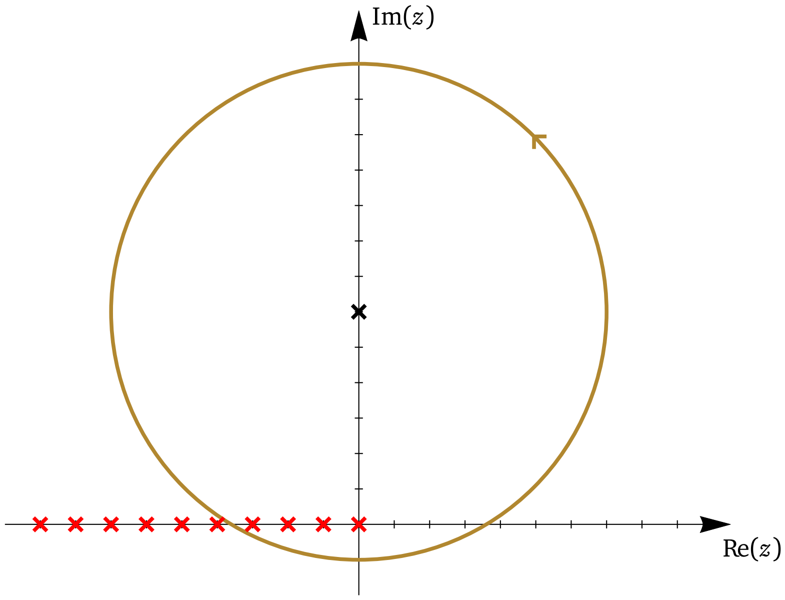
ed è esso stesso un numero dispari. È altresì immediato verificare che il quadrato di un numero pari è ancora un numero pari. Ne consegue che tutti i naturali $n_m \in \mathbb{N}$ della forma

$$n_m = 4m^2 + 4m = 2m(m+1), \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

che esplicitamente sono: $n_1 = 4$, $n_2 = 12$, $n_3 = 24$, ..., non appartengono al dominio di convergenza D, che è quindi definito come

$$D = \mathbb{N} \setminus \{n_m : n_m = 2m(m+1), \forall\, m \in \mathbb{N}\}\ .$$

È interessante notare che il sottoinsieme dei numeri naturali non appartenenti al dominio è esso stesso un sottoinsieme dei numeri pari.



Come esempio, nell figura è riportata in giallo scuro la circonferenza con $n = 6$, cioè quella con centro in $z = 6i$, indicato dal simbolo × in nero, e raggio 7. I simboli × in rosa indicano le posizioni dei primi dieci poli semplici dalla funzione gamma di Eulero.
Il teorema dell'indice afferma che l'indicatore logaritmico della funzione lungo una curva chiusa γ non contenente né poli né zeri della funzione è pari alla differenza del numero di zeri e di poli della stessa, contati con le loro molteplicità, che sono avvolti dalla curva γ. Nel caso in esame, la funzione non ha zeri, quindi

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_n}\mathrm{Arg}\left[\Gamma(z)\right] = -N\,,$$

dove

$$\gamma_n = \left\{z : z = in + (n+1)e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\right\}$$

è la circonferenza n-esima e

$$\Delta_{\gamma_n}\mathrm{Arg}\left[\Gamma(z)\right] = \oint_{\gamma_n} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}dz = \rightsquigarrow_n$$

è la variazione dell'argomento della funzione gamma di Eulero al variare di z su γ_n, che coincide con l'n-esimo integrale cercato. Si ha allora

$$\rightsquigarrow_n = -2i\pi N\,,$$

dove N è il numero di poli semplici della funzione $\Gamma(z)$ avvolti dall'n-esima circonferenza. Questa, come dimostrato, interseca l'asse reale nei punti $\pm x = \pm\sqrt{2n+1}$, quindi avvolge i $2\,\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right) + 1$ numeri relativi, che vanno da $-\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)$ a $\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)$, cioè

$$-\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right), -\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)+1, \ldots, 0, 1, \ldots, \mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right),$$

dove la funzione: $\mathrm{Int}[r] \le r$ è la parte intera del numero reale r, l'identità $\mathrm{Int}[r] = r$ vale se $r \in \mathbb{N}$. Tra questi ci sono i primi $\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)+1$ poli della funzione $\Gamma(z)$, sono

$$-\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right), -\mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)+1, \ldots, 0\,,$$

quindi si ha $N = \mathrm{Int}\left(\sqrt{2n+1}\right)+1$ e l'espressione per l'n-esimo integrale, con $n \in D$, è

$$\rightsquigarrow_n = -2i\pi\,\mathrm{Int}\left(1+\sqrt{2n+1}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si ottengano tutte le serie di Laurent centrate nell'origine della funzione

$$\pitchfork(z) = \frac{1}{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}\,.$$

Curiosità. Il simbolo $\pitchfork$ è quello associato alla lettera "G" dell'Alfabeto Fantascientifico Personalizzato descritto nel primo problema.

Soluzione del secondo problema

La funzione $\pitchfork(z)$ è meromorfa, ha come singolarità 5 poli semplici in corrispondenza degli zeri del polinomio di quinto grado a denominatore. Questo polinomio può essere studiato come la somma dei primi 6 termini della serie geometrica di ragione z, infatti moltiplicando e dividendo per il binomio $z-1$ si ha

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5 = \frac{z^6-1}{z-1}\,,$$

dove $z=1$ è una singolarità eliminabile. I 5 zeri del polinomio di quinto grado sono le ultime 5 radice seste dell'unità, ovvero gli zeri del polinomio di sesto grado a numeratore dell'ultima espressione ad eccezione dell'unità, cioè

$$z_h = e^{2ih\pi/6} = e^{ih\pi/3}\,, \qquad h \in \{1,2,3,4,5\}\,.$$

La prima radice sesta, quella per $h=0$, è l'unità e, come ribadito, è esclusa, non essendo uno zero del polinomio di quinto grado. È immediato verificarlo valutandolo esplicitamente

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5\Big|_{z=1} = 6 \neq 0\,.$$

Ne consegue che la funzione $\pitchfork(z)$ ha cinque poli semplici nei punti dell'insieme

$$\left\{z_h = e^{ih\pi/3}\right\}_{h=1}^{5}\,,$$

disposti lungo la circonferenza unitaria. Ci sono quindi due possibili serie di Laurent centrate nell'origine, la prima ha come dominio di convergenza il cerchio unitario $D_1 = \{z : |z| < 1\}$; la seconda ha come dominio di convergenza la corona circolare $D_2 = \{z : |z| > 1\}$, complementare di D_1 in $\mathbb{C}$, cioè $D_2 = \mathbb{C} \backslash D_1$.
Per la prima serie di Laurent convergente in D_1 riscriviamo la funzione come

$$\pitchfork(z) = \frac{z-1}{z^6-1} = (1-z)\sum_{j=0}^{\infty}\left(z^6\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(z^{6j} - z^{6j+1}\right),$$

dove abbiamo usato la somma della serie geometrica di ragione z^6, che converge in D_1 poiché, essendo $|z|<1$, si ha anche $\left|z^6\right| = |z|^6 < 1$. Ne consegue che i coefficienti della prima serie di Laurent, che scriviamo formalmente come

$$\pitchfork(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k\,,$$

sono definiti dalla legge multipla

$$C_k = \begin{cases} 1 & k = 6j\,,\ \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & k = 6j+1\,,\ \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per ottenere i coefficienti della seconda serie, che converge nella corona circolare D_2, procediamo seguendo un procedimento analogo, avendo la condizione $|z|>1$, cioè $1/|z|<1$. Scriviamo la funzione come

$$\mathfrak{m}(z)=\frac{z-1}{z^6-1}=\frac{1/z^5-1/z^6}{1-1/z^6}=\left(\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^6}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\left(z^{-6j-5}-z^{-6j-6}\right).$$

In questo caso abbiamo usato la somma della serie geometrica di ragione $1/z^6$, che converge in D_2 poiché, essendo $1/|z|<1$, si ha anche $\left|1/z^6\right|=1/|z|^6<1$.
I coefficienti della seconda serie di Laurent, la cui espressione completa è

$$\mathfrak{m}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}D_k z^k\,,$$

sono dati dalla legge multipla

$$D_k=\begin{cases}-1 & k=-6j\,,\ \forall\, j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ 1 & k=-6j+1\,,\ \forall\, j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\quad,\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli l'espansione di Weierstrass della funzione

$$\mathfrak{N}_N(z)=\sum_{j=0}^{2N}(z-1)^j\,,$$

con $N\in\mathbb{N}$.

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{N}$ è quello associato alla lettera "N" dell'Alfabeto Fantascientifico Personalizzato descritto nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

La funzione è un polinomio di grado $2N$, è quindi una funzione intera con un numero finito di zeri che ammette un'espansione di Weierstrass con un numero finito di fattori. Calcoliamo la somma con il metodo della serie geometrica, moltiplichiamo e dividiamo per $(z-1)-1$ e si ha

$$\mathfrak{N}_N(z)=\frac{(z-1)^{2N+1}-1}{z-2}\,.$$

Gli zeri della funzione data $\mathfrak{N}(z)$ sono, come nel caso del secondo problema, i $2N$ che si ottengono escludendo lo zero in $z=2$ dall'insieme dei $(2N+1)$ zeri del polinomio a numeratore. Si osservi che il punto $z=2$ è una singolarità eliminabile dell'espressione razionale della funzione $\mathfrak{N}(z)$ testè ottenuta. Gli zeri del polinomio a numeratore sono i valori z_k, con $k\in\{1,2,\ldots,2N\}$, tali che

$$(z_k-1)^{2N+1}-1=0\qquad\Rightarrow\qquad z_k=1+e^{2ik\pi/(2N+1)}\,.$$

L'insieme degli zeri è $\left\{z_k=1+e^{2ik\pi/(2N+1)}\right\}_{k=1}^{2N}$, in cui, come ribadito, il valore $z_0=2$ non è incluso. Sono zeri semplici.
L'espansione di Weierstrass ha la forma

$$\mathfrak{N}(z)=\mathfrak{N}(0)\exp\left(\frac{\mathfrak{N}'(0)}{\mathfrak{N}(0)}z\right)\prod_{k=1}^{2N}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

Calcoliamo i valori della funzione e della sua derivata prima nell'origine usando rispettivamente l'espressione in forma di somma e quella razionale, si hanno

$$\mathfrak{N}(0)=\sum_{j=0}^{2N}(-1)^j=1+\underbrace{\sum_{j=1}^{2N}(-1)^j}_{=0}=1\,,$$

$$\mathfrak{N}'(z)\Big|_{z=0}=\frac{(2N+1)(z-1)^{2N}}{z-2}\Bigg|_{z=0}-\frac{(z-1)^{2N+1}-1}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=0}=-\frac{2N+1}{2}+\frac{1}{2}=-N\,.$$

L'espansione di Weierstrass è

$$\lll_N(z) = e^{-Nz} \prod_{k=1}^{2N} \left(1 - \frac{z}{e^{2ik\pi/(2N+1)} + 1}\right) \exp\left(\frac{z}{e^{2ik\pi/(2N+1)} + 1}\right).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{A}$ è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni Z_3 dalle azioni

$$\hat{A}|t_1\rangle = \hat{U}|t_2\rangle, \qquad \hat{A}|t_2\rangle = \hat{U}|t_3\rangle, \qquad \hat{A}|t_3\rangle = \hat{U}|t_1\rangle,$$

dove $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset Z_3$ è una base ortonormale e $\hat{U}$ è un operatore unitario definito nello stesso spazio di Hilbert Z_3. Dopo aver classificato l'operatore $\hat{A}$, sapendo che la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{U}$ rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ è

$$\hat{U} \overset{t}{\hookleftarrow} U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ottengano lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ e le matrici che rappresentano, rispetto alla stessa base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, l'operatore $\hat{A}$ e i suoi autovettori.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Poiché un operatore unitario trasforma una base ortonormale in un'altra base ortonormale, si ha che i vettori dell'insieme $\left\{\hat{U}|t_k\rangle \equiv |q_k\rangle\right\}_{k=1}^3 \subset Z_3$ sono, appunto ortonormali e quindi rappresentano anch'essi una base dello spazio di Hilbert Z_3. Ma, i vettori di questa base sono anche ottenuti dalle azioni dell'operatore $\hat{A}$ sui vettori della base di partenza $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset Z_3$, ovvero, come dato dal problema, si hanno

$$\hat{A}|t_1\rangle = |q_2\rangle, \qquad \hat{A}|t_2\rangle = |q_3\rangle, \qquad \hat{A}|t_3\rangle = |q_1\rangle,$$

ciò implica che l'operatore $\hat{A}$ così come $\hat{U}$ è unitario, in quanto trasforma una base ortonormale in un'altra base ortonormale.
La matrice A, che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, ha elementi

$$A_j^k = \langle t_k|\hat{A}|t_j\rangle, \qquad \forall\, k, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Usando le relazioni date e la matrice U che rappresenta l'operatore $\hat{U}$, gli elementi delle tre colonne della matrice A sono

$$\begin{aligned} A_1^k &= \langle t_k|\hat{A}|t_1\rangle = \langle t_k|\hat{U}|t_2\rangle = U_2^k, \\ A_2^k &= \langle t_k|\hat{A}|t_2\rangle = \langle t_k|\hat{U}|t_3\rangle = U_3^k, \\ A_2^k &= \langle t_k|\hat{A}|t_3\rangle = \langle t_k|\hat{U}|t_1\rangle = U_1^k. \end{aligned}$$

Da cui si ottiene che la prima colonna della matrice A coincide con la seconda della matrice U, la seconda con la terza e la terza con la prima, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - I\alpha) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} -\alpha & -i & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & i - \alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ \alpha^2(i - \alpha) + i(i - \alpha) &= 0 \\ \left(\alpha^2 + i\right)(i - \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

da cui,

$$\alpha_1 = i = e^{i\pi/2}\,, \qquad \alpha_2 = \sqrt{-i} = e^{3i\pi/4}\,, \qquad \alpha_3 = -\sqrt{-i} = e^{7i\pi/4}\,.$$

Indicando con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$ l'insieme degli autovettori, le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,3\}$$

e le componenti contro-variati degli autovettori rispetto alla base data si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\left(A^m_j - \alpha_k\delta^m_j\right)a^j_{(k)} = 0\,, \qquad \forall\, m,k \in \{1,2,3\}\,,$$

dove $a^j_{(k)}$ è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, cioè di quello relativo all'autovalore α_k, con $k, j \in \{1,2,3\}$. Calcoliamo i valori delle componenti degli autovettori, i tre sistemi sono

$$\begin{pmatrix} -\alpha_k & -i & 0 \\ 1 & -\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & i-\alpha_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(k)} \\ a^2_{(k)} \\ a^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2,3\}\,,$$

posto $a^1_{(k)} = \bar{a}$, dalla prima e seconda equazione per $k=1$, con $\alpha_1 = i$, si ottiene

$$\begin{cases} -i\bar{a} - ia^2_{(1)} = 0 \\ \bar{a} - ia^2_{(1)} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} = a^2_{(1)} = 0\,,$$

mentre dalla terza equazione si ha che $a^3_{(1)}$ è generico, lo poniamo uguale all'unità cosicché il vettore è normalizzato all'unità, appunto.
Nei casi $k = 2,3$, dalla seconda equazione si ottengono $a^2_{(2,3)} = \bar{a}/\alpha_{2,3}$, mentre dalla terza: $a^3_{(2,3)} = 0$. In definitiva, i tre autovettori hanno rappresentazioni

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \bar{a}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-3i\pi/4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-3i\pi/4} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \bar{a}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-7i\pi/4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-7i\pi/4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{⩚}$ è definito in nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni ed è tale che

$$\sum_{j=1}^N \langle e_k|\hat{⩚}|e_j\rangle = a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\dots,N\}\,,$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ è una base ortonornale dello spazio di Hilbert.
Si dimostri che il numero a è un autovalore dell'operatore e si ottenga l'autovettore corrispondente come combinazione lineare dei vettori della base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$.

Curiosità. Il simbolo ⩚ rappresenta la lettera "Y" dell'alfabeto denominato "Alfabeto Fonetico Fantascientifico" generato da *ChatGPT* assieme al già citato "Alfabeto Fantascientifico Personalizzato".

Soluzione del quinto problema

La condizione delle N somme tutte uguali al numero complesso a diverso da zero, equivale con l'affermare che vale a la somma degli elementi di ciascuna riga della matrice $⩚$, che rappresenta l'operatore $\hat{⩚}$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$. Ovvero, usando

$$\hat{⩚} \overset{e}{\hookleftarrow} ⩚ = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{⩚}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{⩚}|e_2\rangle & \cdots & \langle e_1|\hat{⩚}|e_N\rangle \\ \langle e_2|\hat{⩚}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{⩚}|e_2\rangle & \cdots & \langle e_2|\hat{⩚}|e_N\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_N|\hat{⩚}|e_1\rangle & \langle e_N|\hat{⩚}|e_2\rangle & \cdots & \langle e_N|\hat{⩚}|e_N\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ⩚^1_1 & ⩚^1_2 & \cdots & ⩚^1_N \\ ⩚^2_1 & ⩚^2_2 & \cdots & ⩚^2_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ⩚^N_1 & ⩚^N_2 & \cdots & ⩚^N_N \end{pmatrix},$$

si hanno, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$,

$$a = \sum_{j=1}^{N} \langle e_k | \hat{\Lambda} | e_j \rangle = \sum_{j=1}^{N} \Lambda^k_{\ j} \,.$$

Se a è un autovalore deve essere soluzione dell'equazione secolare

$$\det\big(\Lambda - aI\big) = 0 \,,$$

dove I è la matrice identità $N \times N$. La matrice $\Lambda - aI$ ha la forma

$$\Lambda - aI = \begin{pmatrix} \Lambda^1_{\ 1} - a & \Lambda^1_{\ 2} & \cdots & \Lambda^1_{\ N} \\ \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} - a & \cdots & \Lambda^2_{\ N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda^N_{\ 1} & \Lambda^N_{\ 2} & \cdots & \Lambda^N_{\ N} - a \end{pmatrix} ,$$

quindi la somma degli elementi della generica k-esima riga, con $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, è nulla, infatti,

$$\Lambda^k_{\ 1} + \Lambda^k_{\ 2} + \cdots + \Lambda^k_{\ k-1} + \Lambda^k_{\ k} - a + \Lambda^k_{\ k+1} + \cdots + \Lambda^k_{\ N} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \Lambda^k_{\ j}}_{=a} - a = 0 \,.$$

Ne consegue che la generica m-esima colonna, con $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, della matrice $\big(\Lambda - aI\big)$ può essere scritta come combinazione lineare delle rimanenti $N - 1$ colonne, cioè

$$\big(\Lambda - aI\big)^k_{\ m} = -\sum_{j \neq k} \big(\Lambda - aI\big)^j_{\ m} \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,.$$

Si evince così che la matrice $N \times N$, $\big(\Lambda - aI\big)$ ha rango strettamente minore di N e di conseguenza ha determinate nullo. Abbiamo dimostrato che a è un suo autovalore.
La ricerca dell'autovettore permette anche di ottenere l'autovalore. Consideriamo l'autovettore $|x\rangle$ di autovalore λ, le equazioni agli autovalori in forma astratta e matriciale sono

$$\hat{\Lambda} |x\rangle = \lambda |x\rangle \ \stackrel{e}{\hookleftarrow}\ \Lambda x = \lambda x \,.$$

L'ultima è un'identità tra due vettori ovvero tra due matrici $N \times 1$, la k-esima riga di tale identità è

$$\Lambda^k_{\ j} x^j = \lambda x^k c \big(\Lambda - \lambda I\big)^k_{\ j} x^j = \Big(\Lambda^k_{\ j} - \lambda \delta^k_{\ j}\Big) x^j = 0 \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, \mathbb{N}\} \,,$$

dove $x^j = \langle e_j | x \rangle$ è la j-esima componente contro-variante del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base data, con $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. L'ultima equazione è

$$\Lambda^k_{\ 1} x^1 + \Lambda^k_{\ 2} x^2 + \cdots + \Lambda^k_{\ N} x^N - \lambda x_k = 0 \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, \mathbb{N}\} \,,$$

se tutte le componenti del vettore $|x\rangle$ fossero uguali, ad esempio $x^1 = x^2 = \cdots = x^N \equiv \bar{x} \neq 0$ (la condizione $\bar{x} \neq 0$ è conseguenza dell'assenza del vettore nullo dall'insieme degli autovettori), avremmo

$$\Big(\Lambda^k_{\ 1} + \Lambda^k_{\ 2} + \cdots + \Lambda^k_{\ N} - \lambda\Big) \bar{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda^k_{\ 1} + \Lambda^k_{\ 2} + \cdots + \Lambda^k_{\ N} - \lambda = 0 \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, \mathbb{N}\} \,.$$

Questa identità è verifica per ipotesi quando $\lambda = a$, si evince così che a è un autovalore dell'operatore $\hat{\Lambda}$ con autovettore

$$|x\rangle = (|e_1\rangle + |e_2\rangle + \cdots + |e_N\rangle)\, \bar{x} \,,$$

avente tutte le componenti uguali. Possiamo normalizzarlo, avremo

$$|y\rangle \equiv \frac{|x\rangle}{\||x\|\|} = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle + \cdots + |e_N\rangle}{\sqrt{N}} \quad \stackrel{e}{\hookleftarrow} \quad y = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcolino la trasformata di Fourier della funzione

$$\doteqdot(x) = \left(1 + x^3\right)\theta(1+x)\theta(1-x),$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino di Heaviside e il valore dell'integrale della stessa trasformata di Fourier

$$\circledcirc = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right] dk\,.$$

Curiosità. I simboli $\doteqdot$ e $\circledcirc$ rappresentano rispettivamente le lettere "Z" e "C" dell'Alfabeto Fonetico Fantascientifico generato da *ChatGPT* citato nel quinto problema.

Soluzione del sesto Problema

La trasformata di Fourier si calcola direttamente come

$$\mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \doteqdot(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} \left(1+x^3\right) e^{-ikx} dx\,, = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\,\mathrm{sen}(k)}{k} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x^3 e^{-ikx} dx\,.$$

Calcolando per parti l'integrale rimanente si ottiene

$$\mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^4}\left[\left(-ik^3 - 3k^2 + 6\right)\mathrm{sen}(k) + k\left(k^2 - 6\right)\cos(k)\right].$$

Per ottenere l'integrale $\circledcirc$ usiamo il Teorema di Plancherel, ovvero la formula di Parseval che sancisce l'identità tra il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ e quello tra le loro trasformate di Fourier, ovvero, $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$(f, g) = \left(\mathscr{F}_k[f], \mathscr{F}_k[g]\right)\,,$$

esplicitamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_k^*[f]\,\mathscr{F}_k[g]\,dk\,.$$

L'integrale richiesto può essere scritto come il prodotto scalare della trasformata di Fourier e la funzione costante uguale a uno, cioè

$$\circledcirc = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right] dk = \left(1, \mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right]\right)\,,$$

per cui si ha

$$\circledcirc = \left(1, \mathscr{F}_k\left[\doteqdot\right]\right) = \left(\mathscr{F}_{-x}[1], \doteqdot\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_{-x}^*[1]\doteqdot(x) dx\,.$$

L'anti-trasformata di Fourier dell'unità è

$$\mathscr{F}_{-x}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \sqrt{2\pi}\,\delta(x)\,,$$

dove $\delta(x)$ è la distribuzione delta di Dirac.
Usando questo risultato si ottiene il valore dell'integrale richiesto

$$\circledcirc = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_{-x}^*[1]\doteqdot(x) dx = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\doteqdot(x) dx = \sqrt{2\pi}\doteqdot(0) = \sqrt{2\pi}\,.$$