Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario primaverile - 13 aprile 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\rightarrowtail\!\circledcirc = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}}\,.$$

Suggerimento. È indubbia l'utilità dell'utilizzo della funzione beta di Eulero, facendo particolare attenzione all'intervallo d'integrazione.

Soluzione del primo problema

Seguendo il suggerimento, consideriamo la rappresentazione della funzione beta tramite l'integrale di Eulero di primo tipo

$$\beta(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1}dt\,,$$

che converge $\forall\,(z,u) \in \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\} \times \{u : \operatorname{Re}(u) > 0\}$. Facciamo la sostituzione $t = \cos^2(\theta)$, quindi: $1-t = \operatorname{sen}^2(\theta)$, $dt = -2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta$ e gli estremi d'integrazione inferiore e superiore sono rispettivamente $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$, si ha

$$\beta(z,u) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}(\theta)\operatorname{sen}^{2u-1}(\theta)d\theta\,.$$

È immediato osservare che, con un'opportuna scelta dei valori di z e u, si ottiene l'integranda desiderata, mentre l'intervallo d'integrazione non coincide con quello dell'integrale $\rightarrowtail\!\circledcirc$. Per riportare quest'ultimo, coincidente con l'angolo giro, al solo primo quadrante, suddividiamo l'integrale originale nella somma di quattro contributi, uno per ogni quadrante e, per gli ultimi tre, facciamo degli opportuni cambiamenti di variabile così da ottenere l'intervallo desiderato. Avremo

$$\rightarrowtail\!\circledcirc = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}}\,,$$

facendo le sostituzioni: $\alpha' = \alpha - \pi/2$, $\alpha'' = \alpha - \pi$ e $\alpha''' = \alpha - 3\pi/2$, rispettivamente nel secondo, terzo e quarto integrale,

$$\begin{aligned}
\rightarrowtail\!\circledcirc &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha'+\pi/2)}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha''}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha''+\pi)}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'''}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha'''+3\pi/2)}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\cos(\alpha')}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha''}{\sqrt{-\operatorname{sen}(\alpha'')}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'''}{\sqrt{-\cos(\alpha''')}}\,,
\end{aligned}$$

riscriviamo gli integrali in termini della funzione beta di Eulero

$$
\begin{aligned}
\ni\!\circledcirc &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\cos(\alpha')}} - i\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha''}{\sqrt{\operatorname{sen}(\alpha'')}} - i\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha'''}{\sqrt{\cos(\alpha''')}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-1/2}(\alpha)d\alpha + \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2}(\alpha')d\alpha' - i\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-1/2}(\alpha'')d\alpha'' - i\int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2}(\alpha''')d\alpha'''' \\
&= \frac{\beta(1/2,1/4)+\beta(1/4,1/2)-i\beta(1/2,1/4)-i\beta(1/4,1/2)}{2} \\
&= (1-i)\beta(1/2,1/4)\,,
\end{aligned}
$$

dove l'ultima identità segue dalla simmetria della funzione beta di Eulero rispetto allo scambio delle variabili, cioè: $\beta(z,u)=\beta(u,z)$. Infine, usando l'espressione della funzione beta in termini della funzione gamma di Eulero

$$
\beta(z,u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}\,,
$$

il valore $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ e l'espressione in coordinate polari di $(1-i)=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, la soluzione assume la forma

$$
\ni\!\circledcirc = \sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}e^{-i\pi/4}\,.
$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
\circledast = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^x}{3^x+1}dx\,.
$$

Suggerimento. Un opportuno percorso rettangolare potrebbe facilitare il calcolo dell'integrale.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa essendo il rapporto di funzioni intere. I poli coincidono con gli zeri della funzione a denominatore. Si ottengono come soluzioni dell'equazione $3^z+1=0$ e sono gli elementi dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ovvero i valori che verificano l'identità

$$
e^{z_k\ln(3)} = e^{(2k+1)i\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{\ln(3)}\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.
$$

Alla luce di questo risultato, consideriamo l'integrale

$$
J_R = \oint_{\rho_R} \frac{2^z}{3^z+1}dz\,,
$$

della stessa funzione integranda sul percorso chiuso rettangolare, rappresentato in figura,

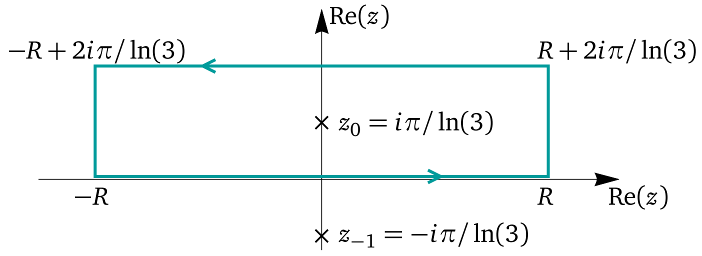
$$
\rho_R = [-R,R]\cup[R,R+2i\pi/\ln(3)]\cup[R+2i\pi/\ln(3),-R+2i\pi/\ln(3)]\cup[-R+2i\pi/\ln(3),-R]\,,
$$

dove il simbolo $[a,b]$ indica il segmento di retta, avente in punti a e b come estremi, orientato da a verso b. Poiché il rettangolo ρ_R, per ogni valore di R, avvolge una volta la sola singolarità z_0, il valore dell'integrale J_R non dipende da R. Quindi, usando il teorema dei residui e considerando il limite $R\to\infty$, si ha

$$
J = \lim_{R\to\infty} J_R = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{2^z}{3^z+1},z_0\right] = 2i\pi\lim_{z\to z_0}\frac{2^z}{3^z+1} = 2i\pi\frac{(2/3)^{z_0}}{\ln(3)} = 2i\pi\frac{e^{z_0\ln(2)}e^{-z_0\ln(3)}}{\ln(3)} = 2i\pi\frac{e^{i\pi\ln(2)/\ln(3)}e^{-i\pi}}{\ln(3)}\,,
$$

cioè

$$
J = -2i\pi\frac{e^{i\pi\ln(2)/\ln(3)}}{\ln(3)}\,.
$$



Calcoliamo lo stesso limite dello stesso integrale in termini della somma dei quattro contributi relativi ai tratti rettilinei la cui unione rappresenta il percorso d'integrazione, ovvero

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^x}{3^x - 1} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{2^{x+2i\pi/\ln(3)}}{3^{x+2i\pi/\ln(3)} - 1} dx + \lim_{R\to\infty} \left(i \int_0^{2\pi/\ln(3)} \frac{2^{R+iy}}{3^{R+iy} - 1} dy + i \int_{2\pi/\ln(3)}^{0} \frac{2^{-R+iy}}{3^{-R+iy} - 1} dy \right)$$
$$= \left(1 - 2^{2i\pi/\ln(3)}\right) \mathcal{I} + \lim_{R\to\infty} \left(i \int_0^{2\pi/\ln(3)} \frac{2^{R+iy}}{3^{R+iy} - 1} dy + i \int_{2\pi/\ln(3)}^{0} \frac{2^{-R+iy}}{3^{-R+iy} - 1} dy \right) .$$

Dimostriamo che i valori limite degli ultimi due integrali dell'espressione prendente sono nulli. Consideriamo contemporaneamente il modulo di entrambi, si ha

$$0 \le \left| i \int_0^{2\pi/\ln(3)} \frac{e^{(\pm R+iy)\ln(2)}}{e^{(\pm R+iy)\ln(3)} + 1} dy \right| \le \int_0^{2\pi/\ln(3)} \frac{e^{\pm R\ln(2)}}{\left|e^{\pm R\ln(3)} - 1\right|} dy = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\ln(3)} \dfrac{e^{R\ln(2/3)}}{\left|1 - e^{-R\ln(3)}\right|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{segno “+”} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{\ln(3)} \dfrac{e^{-R\ln(2)}}{\left|e^{-R\ln(3)} - 1\right|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} & \text{segno “−”} \end{cases} ,$$

dove l'annullamento dei limiti nei due casi è conseguenza della negatività di coefficienti di R ad esponente degli esponenziali a numeratore, ovvero: $\ln(2/3) < 0$ per il segno "+" e $-\ln(2) < 0$ per il segno "−". Alla luce di questi risultati, le due espressioni per il limite dell'integrale sono

$$J = -2i\pi \frac{e^{i\pi\ln(2)/\ln(3)}}{\ln(3)} = \left(1 - 2^{2i\pi/\ln(3)}\right) \mathcal{I} = \left(1 - e^{2i\pi\ln(2)/\ln(3)}\right) \mathcal{I} ,$$

risolviamo l'identità tra secondo e quarto membro rispetto all'integrale cercato $\mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = -2i\pi \frac{e^{i\pi\ln(2)/\ln(3)}/\ln(3)}{1 - e^{2i\pi\ln(2)/\ln(3)}} = -2i\pi \frac{1/\ln(3)}{e^{-i\pi\ln(2)/\ln(3)} - e^{i\pi\ln(2)/\ln(3)}} .$$

Usando la formula di Eulero per la funzione seno, la differenza degli esponenziali a denominatore può essere scritta come $-2i\,\mathrm{sen}\,(\pi\ln(2)/\ln(3))$, si ottiene, quindi, il risultato finale

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{\ln(3)\,\mathrm{sen}\,(\pi\ln(2)/\ln(3))} .$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottengano i coefficienti C_{-1}, C_0, C_1, C_2 e C_3 dello sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{5^z - 5} ,$$

con centro in $z = 1$ e convergente nell'origine.
Suggerimento. La serie geometrica è sempre d'aiuto.

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, essendo il rapporto di funzioni intere, ha i poli nei punti dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, che rappresentano gli zeri della funzione a denominatore, ovvero sono tali da verificare l'equazione

$$5^z-5=0 \qquad \Rightarrow \qquad 5^{z_k-1}=e^{2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad e^{\left(z_k-1\right)\ln(5)}=e^{2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k=\frac{2ik\pi}{\ln(5)}+1\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

Il punto $z=1$ rappresenta, quindi, un polo, quello con $k=0$, cioè $z_0=1$. I due più vicini sono $z_{-1}=-2i\pi/\ln(5)+1$ e $z_1=2i\pi/\ln(5)+1$, hanno la stessa distanza da z_0, infatti $\left|z_0-z_1\right|=\left|z_0-z_{-1}\right|=2\pi/\ln(5)\simeq 3,9$. La serie di Laurent con centro in $z=1$, convergente nell'origine, converge nella corona circolare $C_{0,2\pi/\ln(5)}=\{z:0<|z-1|<2\pi/\ln(5)\}$, infatti $|0-1|=1<2\pi/\ln(5)$.

Manipoliamo la funzione, prima mettendo in evidenza 5 a denominatore, scrivendo, poi, in forma esponenziale la potenza e, infine, usando la serie di Taylor dell'esponenziale, si ha

$$f(z)=\frac{1}{5\left(5^{z-1}-1\right)}=\frac{1}{5}\frac{1}{e^{(z-1)\ln(5)}-1}=\frac{1}{5}\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k\ln^k(5)}{k!}-1}=\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z-1)^k\ln^k(5)}{k!}\right)^{-1}.$$

A denominatore mettiamo in evidenza il primo termine della serie, cioè $(z-1)\ln(5)$, così da ottenere un'espressine del tipo $1/(1-\alpha)$, riconducibile alla somma di una serie geometrica di ragione α una volta verificate le condizioni di convergenza. Si ha

$$f(z)=\frac{1}{5(z-1)\ln(5)}\,\frac{1}{1+(z-1)\ln(5)/2!+(z-1)^2\ln^2(5)/3!+\mathscr{O}\left((z-1)^3\right)}\,,$$

il secondo fattore può essere scritto come la serie geometrica di ragione pari all'opposto della quantità sommata all'unità a denominatore del secondo fattore, ovvero

$$f(z)=\frac{1}{5(z-1)\ln(5)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{(z-1)\ln(5)}{2!}+\frac{(z-1)^2\ln^2(5)}{3!}+\mathscr{O}\left((z-1)^3\right)\right)^k.$$

I primi cinque termini della serie, ovvero quelli fino alla quarta potenza della ragione, con cui possiamo calcolare i coefficienti della serie di Laurent fino alla terza potenza del binomio $(z-1)$, sono

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{5(z-1)\ln(5)}\Bigg[1&-\left(\frac{(z-1)\ln(5)}{2!}+\frac{(z-1)^2\ln^2(5)}{3!}+\cdots\right)+\left(\frac{(z-1)\ln(5)}{2!}+\frac{(z-1)^2\ln^2(5)}{3!}+\cdots\right)^2\\&-\left(\frac{(z-1)\ln(5)}{2!}+\frac{(z-1)^2\ln^2(5)}{3!}+\cdots\right)^3+\left(\frac{(z-1)\ln(5)}{2!}+\frac{(z-1)^2\ln^2(5)}{3!}+\cdots\right)^4+\cdots\Bigg].\end{aligned}$$

Considerando i contributi dei soli primi cinque termini, il sesto contribuirebbe con la potenza minima di $(z-1)^4$, si ha

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{1}{5\ln(5)}(z-1)^{-1}+\frac{1}{5\ln(5)}\underbrace{\left(-\frac{\ln(5)}{2!}\right)}_{I}+\frac{1}{5\ln(5)}\left[\underbrace{-\frac{\ln^2(5)}{3!}}_{I}+\underbrace{\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^2}_{II}\right](z-1)\\&+\frac{1}{5\ln(5)}\left[\underbrace{-\frac{\ln^3(5)}{4!}}_{I}\underbrace{+2\frac{\ln^3(5)}{2!3!}}_{II}\underbrace{-\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^3}_{III}\right](z-1)^2\\&+\frac{1}{5\ln(5)}\left[\underbrace{-\frac{\ln^4(5)}{5!}}_{I}+\underbrace{\left(\frac{\ln^2(5)}{3!}\right)^2+2\frac{\ln^4(5)}{2!4!}}_{II}\underbrace{-3\frac{\ln^4(5)}{2!2!3!}}_{III}+\underbrace{\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^4}_{IV}\right](z-1)^3+\cdots,\end{aligned}$$

dove i numeri romani attribuiti a ciascun contributo indicano il termine in parentesi tonde da cui si lo stesso contributo è stato ottenuto. Ad esempio, il contributo etichettato con II è stato ottenuto dal termine in parentesi tonde elevato al quadrato. I valori dei cinque coefficienti di Laurent richiesti dal problema sono:

$$C_{-1}=\frac{1}{5\ln(5)}\,; \qquad C_0=\frac{1}{5\ln(5)}\left(-\frac{\ln(5)}{2!}\right)=-\frac{1}{10}\,;$$
$$C_1=\frac{1}{5\ln(5)}\left[-\frac{\ln^2(5)}{3!}+\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^2\right]=\frac{\ln(5)}{5}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\ln(5)}{60}\,;$$
$$C_2=\frac{1}{5\ln(5)}\left[-\frac{\ln^3(5)}{4!}+2\frac{\ln^3(5)}{2!3!}+\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^3\right]=\frac{\ln^2(5)}{5}\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)=0\,;$$
$$C_3=\frac{1}{5\ln(5)}\left[-\frac{\ln^4(5)}{5!}+\left(\frac{\ln^2(5)}{3!}\right)^2+2\frac{\ln^4(5)}{2!4!}-3\frac{\ln^4(5)}{2!2!3!}+\left(\frac{\ln(5)}{2!}\right)^4\right]=\frac{\ln^3(5)}{5}\left(-\frac{1}{120}+\frac{1}{36}+\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)$$
$$=-\frac{\ln^3(5)}{3600}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore diagonalizzabile $\hat{A}$ è definito nello spazio di Hilbert a due dimensioni E_2 e ha lo spettro discreto $\{-1, i\}$. Si dimostri che: $\hat{A}^4=\hat{I}$. Indicando con $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ gli autovettori aventi, rispettivamente, autovalori $\alpha_1=-1$ e $\alpha_2=i$, si ottengano le matrici 2×2 che rappresentano l'operatore $\hat{A}$ e gli operatori di proiezione ortogonali $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$ rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^2$, sapendo che

$$|a_1\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad |a_2\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} a_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

e che vale la rappresentazione spettrale

$$\hat{A}=\alpha_1\hat{P}_1+\alpha_2\hat{P}_2\,.$$

Suggerimento. Sono d'ausilio le proprietà degli operatori di proiezione.

Soluzione del quarto problema

L'operatore è diagonalizzabile e ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{A}=\alpha_1\hat{P}_1+\alpha_2\hat{P}_2\,.$$

Anche la sua quarta potenza è un operatore diagonalizzabile e ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{A}^4=\alpha_1^4\hat{P}_1+\alpha_2^4\hat{P}_2\,,$$

ma, poiché $\alpha_1^4=\alpha_2^4=1$, e avendo $\hat{P}_1+\hat{P}_2=\hat{I}$, si ha la dimostrazione richiesta: $\hat{A}^4=\hat{I}$.
Possiamo ottenere la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ a partire dalle due equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_1\rangle=\alpha_1|a_1\rangle \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad \begin{pmatrix}A_1^1 & A_2^1\\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}A_1^1+A_2^1=-1\\ A_1^2+A_2^2=-1\end{cases};$$
$$\hat{A}|a_2\rangle=\alpha_2|a_2\rangle \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad \begin{pmatrix}A_1^1 & A_2^1\\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}A_1^1=i\\ A_1^2=0\end{cases},$$

da cui si ha

$$A=\begin{pmatrix}i & -1-i\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Per ricavare le matrici P_1 e P_2 dei proiettori, usiamo la rappresentazione spettrale e la somma unitaria degli stessi proiettori, ovvero: $A=-P_1+iP_2$ e $I=P_1+P_2$. Sommando membro a membro si ottiene la matrice P_2,

$$(i+1)P_2=A+I \quad \Rightarrow \quad P_2=\frac{1}{i+1}(A+I)=\frac{1}{i+1}\begin{pmatrix}1+i & -1-i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

mentre per P_1 si ha

$$P_1 = I - P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

In definitiva la matrici che rappresentano i due proiettori rispetto alla base canonica sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\text{♀}(x) = \frac{1}{(x+3)^5} .$$

Curiosità. Il simbolo ♀ indica la lettera "A" dell'alfabeto *Galach* della lingua usata nei testi ufficiali e nella Corte Reale su *Kaitain* e funge da lingua franca nell'universo di *Dune*.

Soluzione del quinto problema

la funzione di $\text{♀}(x)$ è proporzionale alle derivata quarta dell'inverso di un binomio, infatti si ha

$$\text{♀}(x) = \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dx^4} \frac{1}{x+3} ,$$

ne consegue che la trasformata di Fourier vale

$$\mathscr{F}_k \left[\text{♀} \right] = \frac{(ik)^4}{4!} \mathscr{F}_k \left[\frac{1}{x+3} \right] = \frac{k^4}{4!} \mathscr{F}_k \left[\frac{1}{x+3} \right] .$$

La trasformata di Fourier del polo semplice $1/(x+3)$, essendo il polo reale, si ottiene con un integrale in valore principale, cioè

$$\mathscr{F}_k \left[\frac{1}{x+3} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x+3} dx .$$

Usiamo la formula di Sokhotski-Plemelj, spostando il polo nel semipiano della parti immaginarie negative, per poi sfruttare il lemma di Jordan, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x+3} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x+3+i\epsilon} dx + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{3ik} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{3ik} + i\sqrt{2\pi} \begin{cases} 0 & k<0 \\ -e^{3ik} & k>0 \end{cases} \\ &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{3ik} \begin{cases} 1 & k<0 \\ -1 & k>0 \end{cases} , \end{aligned}$$

in termini della funzione segno la trasformata di Fourier del polo semplice vale

$$\mathscr{F}_k \left[\frac{1}{x+3} \right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{3ik} \, \text{Segno}[k] .$$

Il risultato finale è

$$\mathscr{F}_k \left[\text{♀} \right] = -\frac{i}{24} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k^4 e^{3ik} \, \text{Segno}[k] .$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga il prodotto scalare $(\text{Ƛ}, \text{Þ})$ delle funzioni

$$\text{Ƛ}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)}{y^2+1} dy , \qquad \text{Þ}(x) = e^{-x^2} .$$

Curiosità. I simboli Ƛ e Þ indicano rispettivamente le lettera "F" e "G" dell'alfabeto *Galach*.
Suggerimento. L'equazione di Parseval può facilitare il calcolo.

Soluzione del sesto Problema

L'equazione di Parseval sancisce l'identità tra il prodotto scalare delle funzioni e quello delle rispettive trasformate di Fourier. Poiché l'integrale che definisce la funzione $\text{ㅈ}(x)$ può essere posto in forma di convoluzione, infatti usando la formula di somma della funzione coseno, si ha

$$\text{ㅈ}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x-y)}{y^2+1} dy = \left(\cos(w) * \frac{1}{w^2+1} \right)(x)\,,$$

passare alle trasformate di Fourier porterebbe ad una esemplificazione, perché il prodotto scalare si ridurrebbe a un'integrazione singola anziché doppia. L'equazione di Parseval è

$$(\text{ㅈ}, \text{Þ}) = \left(\tilde{\text{ㅈ}}, \tilde{\text{Þ}} \right)\,,$$

dove abbiamo definito le trasformate di Fourier: $\tilde{\text{ㅈ}}(k) = \mathscr{F}_k\left[\text{ㅈ}\right], \tilde{\text{Þ}}(k) = \mathscr{F}_k\left[\text{Þ}\right]$. Per la prima trasformata di Fourier usiamo il teorema della convoluzione

$$\tilde{\text{ㅈ}}(k) = \mathscr{F}_k\left[\left(\cos(w) * \frac{1}{w^2+1} \right)(x) \right] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k\left[\cos(w)\right] \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w^2+1} \right]\,.$$

Le due trasformate di Fourier presenti nel terzo membro della precedente equazione sono

$$\mathscr{F}_k\left[\cos(w)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-ix(k-1)} + e^{-ix(k+1)} \right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(k-1) + \delta(k+1) \right)\,;$$

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w^2+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+1} dx = i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k)\frac{e^k}{2i} - \theta(k)\frac{e^{-k}}{-2i} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}\,.$$

Infine, la trasformata di Fourier della funzione gaussiana $\text{Þ}(x)$ è

$$\tilde{\text{Þ}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik/2)^2} dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,.$$

Alla luce di questi risultati, il prodotto della trasformate di Fourier, cioè il prodotto scalare cercato, è dato dall'integrale del prodotto delle tre funzioni definite nelle tre precedenti espressioni e il fattore $\sqrt{2\pi}$ del teorema della convoluzione, ovvero

$$(\text{ㅈ}, \text{Þ}) = \left(\tilde{\text{ㅈ}}, \tilde{\text{Þ}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\text{ㅈ}}^*(k) \tilde{\text{Þ}}(k) dk = \frac{\pi^{3/2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(k-1) + \delta(k+1) \right) e^{-|k| - k^2/4} dk\,,$$

da cui, sfruttando le funzioni delta di Dirac si ha

$$(\text{ㅈ}, \text{Þ}) = \pi^{3/2} e^{-5/4}\,.$$