Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello estivo - 12 luglio 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione

$$\text{🌡}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1}$$

e se ne definisca il dominio di analiticità.

Soluzione del primo problema

La somma della serie e quindi l'espressione analitica della funzione $\text{🌡}(z)$ può essere calcolata con il metodo dei residui. Definendo la funzione

$$f(w) = \frac{1}{z^2 w^2 - 1}\,,$$

si ha che la funzione cercata è

$$\text{🌡}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)\,,$$

ovvero è la serie dei valori che la funzione $f(z)$ assume nei numeri dispari. Al fine di usare il metodo di somma basato sul teorema dei residui, è necessario definire una funzione di lavoro che abbia poli semplici nei dispari e come residui corrispondenti i valori $f(2k+1)$. La funzione è

$$F(w) = -f(w)\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(\pi w/2)}{\cos(\pi w/2)} = -f(w)\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi w}{2}\right),$$

che ha l'insieme di poli semplici $\{w_k = 2k+1\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dovuti alla funzione tangente di argomento $w\pi/2$, infatti la funzione tangente ha poli semplici nei multipli dispari di $\pi/2$. Il coefficiente $-\pi/2$ fa sì che il residuo della funzione $F(w)/f(w)$ sia unitario. Si ha, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{Res}[F(w), w_k] = -\frac{\pi}{2}\lim_{w\to w_k} f(w)\frac{\operatorname{sen}(\pi w/2)}{\cos(\pi w/2)}(w - w_k) = -\frac{\pi}{2} f(w_k)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi w_k}{2}\right)\lim_{w\to w_k}\frac{2}{-\pi\operatorname{sen}(\pi w/2)} = f(w_k)\,.$$

La funzione di lavoro $F(w)$ ha, in aggiunto all'insieme di poli semplici $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, anche i due ulteriori poli semplici $w_\pm = \pm 1/z$, dovuti alla $f(w)$. Consideriamo l'insieme di integrali, ovvero di funzioni di z, $\{J_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=2n} F(w)dw = \operatorname{Res}[F(w), -1/z] + \operatorname{Res}[F(w), 1/z] + \sum_{k=-n}^{n-1}\operatorname{Res}[F(w), w_k]\,,$$

$\forall\, n \in N$ e $\forall z \in \mathbb{C}$, tale che $|z| > 1/(2n)$. I residui nei poli semplici $w_\pm = \pm 1/z$ sono uguali e il valore comune è

$$\mathrm{Res}\left[F(w), \pm 1/z\right] = \lim_{w\to w_\pm} F(w)(w - w_\pm) = -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi w_\pm}{2}\right)\frac{1}{2z^2 w_\pm} = -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\frac{1}{2z}\,.$$

Nel limite $n \to \infty$ si ha che la successione di funzioni tende alla funzione nulla puntualmente, $\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Studiamo il comportamento del modulo della funzione tangente $\tan(\pi w/2)$ sull'n-sima circonferenza $\{w : |w| = 2n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. La suddetta funzione a poli semplici è quindi divergente in $w = (2k+1)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei dispari positivi e negativi. Poiché le circonferenze considerate intersecano l'asse reale solo nei pari postivi e negativi, il modulo della funzione tangente, $|\tan(\pi w/2)|$, sull'n-sima circonferenza $\{w : |w| = 2n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, è limitato. Esiste, quindi un valore massimo $M \in (0, \infty)$ del modulo che, inoltre, per la periodicità della stessa funzione, non dipende dalla circonferenza, ovvero

$$M = \max_{|w|=2n}\left\{|\tan(\pi w/2)|\right\} \in (0, \infty)\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Ne consegue che, per valori di z tali che: $|z| > 1/(2n)$,

$$0 \le |j_n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|w|=2n} |F(w)||dw| = \frac{1}{4}\oint_{|w|=2n} \frac{|\tan(\pi w/2)|}{|z^2w^2 - 1|}|dw| \le \frac{M}{4}\oint_{|w|=2n}\frac{|dw|}{|z|^2 4n^2 - 1} = \frac{n\pi M}{|z|^2 4n^2 - 1}\,,$$

da cui, come anticipato,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |j_n(z)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi M}{|z|^2 4n^2 - 1} = 0\,.$$

Usando il valore dell'integrale in termini della somma dei residui e l'espressione della funzione $f(w) = 1/\left(z^2w^2 - 1\right)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} J_n(z) = \mathrm{Res}\left[F(w), -1/z\right] + \mathrm{Res}\left[F(w), 1/z\right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}\left[F(w), w_k\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1} \\
&= -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1} \\
&= \left\{k' = -k - 1\right\} = -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1} + \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{z^2(-2k'-1)^2 - 1} \\
&= -\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\frac{1}{z} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1}\,.
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto alla serie si ottiene la funzione cercata

$$\text{🌡}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^2(2k+1)^2 - 1} = \frac{\pi}{4z}\tan\left(\frac{\pi}{2z}\right)\,.$$

La funzione ha un'insieme di poli semplici in $\{z_k = 1/(2k+1)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e una singolarità essenziale nell'origine, quindi il dominio di analiticità è

$$D = \mathbb{C}\backslash\left(\{0\} \cup \{z_k = 1/(2k+1)\}_{k\in\mathbb{Z}}\right)\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la serie di Mittag-Leffler della funzione

$$\text{⁝|F}(z) = \frac{1}{e^z + 1} - \frac{1}{e^{2z} - 1}\,.$$

Soluzione del secondo problema

Gli insiemi delle singolarità delle due funzioni meromorfe la cui differenza coincide con la funzione data $f(z)$ sono: $\{(2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\{ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il secondo insieme contiene il primo. Sono, al più, poli semplici, i residui, distinguendo i poli multipli pari, $k=2m$, e dispari, $k=2j+1$, di $\pm i\pi$, con $m, j \in \mathbb{Z}$, sono

$$\operatorname{Res}\left[f(z), ik\pi\right] = \lim_{z\to ik\pi} f(z)(z-ik\pi) = \begin{cases} -e^{-4im\pi}/2 = -1/2 & k=2m \\ e^{-(2j+1)i\pi} - e^{-2(2j+1)i\pi}/2 = -3/2 & k=2j+1 \end{cases} .$$

La serie di Mittag-Leffler è

$$f(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-2ik\pi} + \frac{3}{z-(2k+1)i\pi}\right),$$

dove $\phi(z)$ è la parte intera della funzione $f(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico, cioè

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\phi(z).$$

Manipoliamo l'indice della somma per scrivere entrambi i contributi sotto forma di serie per indici non negativi. Si ha

$$f(z) = \phi(z) + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-2ik\pi} - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{z-2ik\pi} - \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-(2k+1)i\pi} - \frac{3}{2}\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{z-(2k+1)i\pi},$$

nella seconda e quarta serie facciamo rispettivamente i cambiamenti di indice: $k'=-k$ e $k'=-k-1$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi(z) + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-2ik\pi} - \frac{1}{2}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{z+2ik'\pi} - \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-(2k+1)i\pi} - \frac{3}{2}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{z+(2k'+1)i\pi} \\ &= \phi(z) + \frac{1}{2z} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{z^2+(2k)^2\pi^2} - 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{z^2+(2k+1)^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Verifichiamo che la funzione $f(z)$ non ha un singolarità all'infinito, consideriamo il limite $z\to\infty$ lungo la successione $\left\{z_k = e^{i\theta}(2k+1)\pi/2\right\}_{k=0}^{\infty}$, con $\theta\in[0,2\pi]$, nei tre casi: $Re(z_k)=x_k>0$, $x_k<0$ e $x_k=0$, che coprono tutte le possibilità. Nel primo caso si ha che per $k\to\infty$ la parte reale diverge come $x_k\to\infty$, quindi

$$0 \le \left|f(z_k)\right| \le \frac{1}{e^{x_k}-1} + \frac{1}{e^{2x_k}-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nel secondo caso, per $k\to\infty$ la parte reale diverge come $x_k\to-\infty$, quindi

$$0 \le \left|f(z_k)\right| \le \frac{1}{e^{x_k}-1} + \frac{1}{e^{2x_k}-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -2.$$

Nel terzo caso, poiché la parte reale è nulla, i valori della successione $\left\{z_k = e^{i\theta}(2k+1)\pi/2\right\}_{k=0}^{\infty}$ sono immaginari puri e si ha cioè $\{z_k = \pm(2k+1)i\pi/2\}_{k=0}^{\infty}$, quindi $e^{z_k} = \pm(-1)^k i$ e $e^{2z_k}=-1$, $\forall \mid \in\rangle \mathbb{N}\cup\{0\}$, perciò

$$\left|f(z_k)\right| = \left|\frac{1}{e^{z_k}+1} - \frac{1}{e^{2z_k}-1}\right| = \left|\frac{1}{\pm(-1)^k i+1} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1\mp(-1)^k i}{2} + \frac{1}{2}\right| = \left|1\mp(-1)^k\frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

In tutti i casi la funzione è limitata, quindi lo è in generale per $z\to\infty$, ne consegue che la parte intera è costante, poniamo $\phi(z)=\phi_0$. Per calcolare questo valore valutiamo la funzione dell'origine. Infatti, pur essendo una singolarità, il comportamento è noto e si ha il vantaggio di annullare il contributo della seconda serie, mentre quello della prima è dato dal solo primo termine $-1/z$. Consideriamo il limite

$$\lim_{z\to0} f(z) = \lim_{z\to0}\left(\phi_0 + \frac{1}{2z} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{z^2+(2k)^2\pi^2} - 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{z^2+(2k+1)^2\pi^2}\right) = \lim_{z\to0}\left(\phi_0 + \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to0}\left(\phi_0 - \frac{1}{2z}\right),$$

risolviamo per la costante ϕ_0 e usiamo l'espressione nota della funzione $f(z)$ e, per la forma zero su zero applichiamo due volte di De l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \lim_{z\to0}\left(f(z) + \frac{1}{2z}\right) = \lim_{z\to0}\left(\frac{1}{e^z+1} - \frac{1}{e^{2z}-1} + \frac{1}{2z}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{z\to0}\left(\frac{1}{e^{2z}-1} - \frac{1}{2z}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{2z-e^{2z}+1}{(e^{2z}-1)z} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{2-2e^{2z}}{2ze^{2z}+e^{2z}-1} = \frac{1}{2} - \lim_{z\to0}\frac{-e^{2z}}{e^{2z}+(2z+1)e^{2z}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$F(z) = 1 + \frac{1}{2z} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2k)^2\pi^2} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2k+1)^2\pi^2}\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcolino i primi tre coefficienti non nulli della serie di Laurent della funzione

$$G(z) = \frac{1}{\tan(z) - z}\,,$$

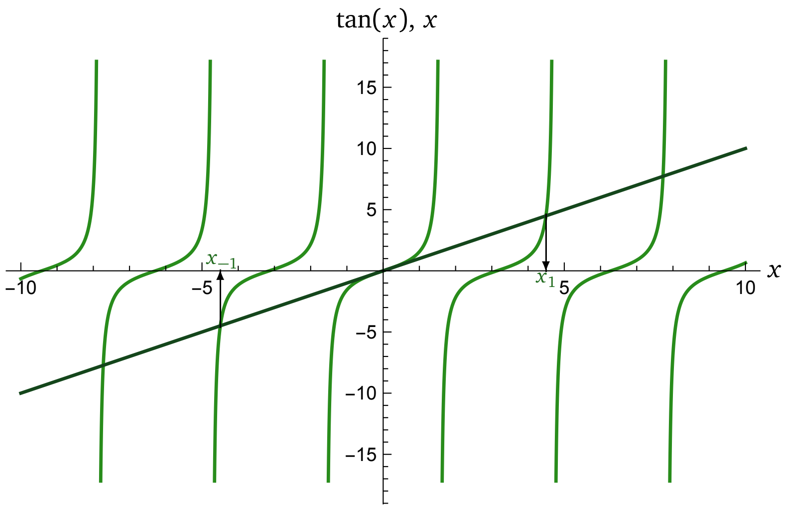
con centro nell'origine, convergente nel punto $z_0 = 1/2$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $G(z)$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Ha poli in corrispondenza degli zeri del denominatore, ovvero delle soluzioni dell'equazione

$$G^{-1}(z) = \tan(z) - z = 0\,.$$

La figura rappresenta l'andamento della funzione tangente e della funzione identità per valori reali, i punti d'intersezione sono i poli della funzione $G(z)$.



Indichiamo con $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ l'insieme di tali poli e, in virtù della anti-simmetria della funzione, infatti: $G(z) = -G(-z)$, si ha $x_k = -x_{-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ e $x_0 = 0$. Dal grafico si evince che il poli più vicini a quello nell'origine, ovvero $x_{\pm 1}$, indicati dalle frecce nere e dal testo in verde, hanno lo stesso modulo, che verifica la condizione $|x_{\pm 1}| > 4$. Ne consegue che la corona di convergenza della serie di Laurent centrata nell'origine e contenente il punto $z_0 = 1/2$ è

$$C_{0,|x_1|} = \{z : 0 < |z| < |x_1|\}\,.$$

Riscriviamo la funzione in termini delle funzioni seno e coseno, come

$$G(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z) - z\cos(z)}\,.$$

Utilizziamo le serie di Taylor centrate nell'origine per le funzioni trigonometriche, ovvero

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z) - z\cos(z)} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l)!}\right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k)!}\left(\frac{1}{2k+1} - 1\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)!}\right)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Consideriamo per la serie a denominatore, prima, per quella a numeratore, poi, la somma dei primi termini, con potenze non superiori alla quarta e mettiamo in evidenza la potenza minima a denominatore, si ha

$$\Phi(z) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}\right)\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5\cdot 3!} + \frac{z^7}{7\cdot 5!} + \mathcal{O}\left(z^9\right)\right)^{-1} = 3\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j-3}}{(2j)!}\right)\left(1 - \frac{z^2}{10} + \frac{z^4}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^{-1}.$$

La funzione a denominatore può essere interpretata come l'inverso della somma della serie geometrica di ragione $\left(z^2/10 - z^4/280 + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)$, ovvero

$$\Phi(z) = 3\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{24} - \frac{z^3}{120} + \cdots\right)\left[1 + \left(\frac{z^2}{10} - \frac{z^4}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right) + \left(\frac{z^2}{10} - \frac{z^4}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^2 + \cdots\right].$$

È immediato evincere che il polo nell'origine è del terzo ordine, infatti la potenza minore che compare nella serie è z^{-3} con coefficiente $C_{-3} = 3$. Inoltre, essendo la funzione $\Phi(z)$ anti-simmetrica, tutti i coefficienti con indice pari della serie di Laurent sono nulli, compariranno cioè solo le potenza dispari. Ci aspettiamo che i primi tre coefficienti non nulli siano, in aggiunta a $C_3 = 3$, C_{-1} e C_1. Li otteniamo facendo esplicitamente i prodotti tra i termini dei due fattori, il primo tra parentesi tonde, il secondo tra parentesi quadre dell'espressione precedente, raccogliendo tutti i contributi a ogni stessa potenza di z. Si ha

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) + 3z\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{20} - \frac{1}{280} + \frac{1}{10^2}\right) + \mathcal{O}\left(z^3\right)\\ &= \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\frac{6}{5} - \frac{z}{175} + \mathcal{O}\left(z^3\right),\end{aligned}$$

ne consegue che i primi tre coefficienti non nulli sono:

$$C_{-3} = 3\,, \qquad C_{-1} = -\frac{6}{5}\,, \qquad C_1 = -\frac{1}{175}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che, dato un operatore $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N, l'operatore

$$\hat{U} = \cos\left(i\hat{A}\right) + \operatorname{senh}\left(\hat{A}\right)$$

è unitario, se e solo se: $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$, ovvero, se e solo se l'operatore $\hat{A}$ è anti-hermitiano. Nel caso in cui l'operatore $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert a 2 dimensioni E_2, sia rappresentato, rispetto a una base canonica, dalla matrice

$$\hat{A} \hookleftarrow A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},$$

si ottengano:

- la matrice U che rappresenta l'operatore $\hat{U}$ rispetto alla stessa base canonica;
- gli spettri discreti degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{U}$;
- i vettori che rappresentano gli autovettori degli stessi operatori, sempre rispetto alla base canonica considerata.

Soluzione del quarto problema

Dimostriamo la condizione necessaria.
Dim. ($\Rightarrow$). L'operatore $\hat{U}$ è unitario allora esiste un operatore hermitiano $\hat{H}$ tale che

$$\hat{U} = e^{i\hat{H}}\,,$$

d'altro canto, si ha

$$\hat{U} = \cos\left(i\hat{A}\right) + \operatorname{senh}\left(\hat{A}\right) = \frac{e^{-\hat{A}} + e^{\hat{A}}}{2} + \frac{e^{\hat{A}} - e^{-\hat{A}}}{2} = e^{\hat{A}}.$$

L'identità delle due espressioni, $\hat{A} = i\hat{H}$, implica che l'operatore $\hat{A}$ si ottiene come il prodotto di un operatore hermitiano per lo scalare i, unità immaginaria. Ne consegue che l'aggiunto

$$\hat{A}^\dagger = \left(i\hat{H}\right)^\dagger = -i\hat{H}^\dagger = -i\hat{H} = -\hat{A},$$

quindi, l'operatore $\hat{A}$ è anti-hermitiano.
Dim. ($\Leftarrow$). Come nel caso precedente si ha $\hat{U} = e^{\hat{A}}$, ne calcoliamo l'aggiunto, avendo per ipotesi che l'operatore $\hat{A}$ è anti-hermitiano, ovvero $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$,

$$\hat{U}^\dagger = \left(e^{\hat{A}}\right)^\dagger = e^{\hat{A}^\dagger} = e^{-\hat{A}}.$$

È immediato osservare che l'aggiunto dell'operatore $\hat{U}$ coincide con l'inverso, infatti, i due prodotti

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}} = \hat{I}\,, \qquad \hat{U}^\dagger\hat{U} = e^{-\hat{A}}e^{\hat{A}} = \hat{I}\,.$$

Ne consegue che l'operatore $\hat{U}$ è hermitiano.
Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ dato sono le soluzione dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - \alpha I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} i-\alpha & 1 \\ -1 & -i-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ \alpha^2 + 2 &= 0\,, \end{aligned}$$

lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ è: $\sigma_A = \left\{\alpha_- = -i\sqrt{2}, \alpha_+ = i\sqrt{2}\right\}$. Per il teorema spettrale, gli autovalori dell'operatore $\hat{U}$ si ottengono da quelli dell'operatore $\hat{A}$ attraverso la stessa relazione funzionale che lega i due operatori, indicando con $\sigma_U = \{\lambda_-, \lambda_+\}$ lo spettro discreto dell'operatore $\hat{U}$ si ha

$$\lambda_\pm = e^{\alpha_\pm} = e^{\pm i\sqrt{2}}.$$

Lo spettro discreto dell'operatore $\hat{U}$ è $\sigma_U = \left\{\lambda_- = e^{-i\sqrt{2}}, \lambda_+ = e^{i\sqrt{2}}\right\}$, gli autovalori sono delle fasi pure poiché l'operatore è unitario.
Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori comuni degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{U}$ si ottengono come soluzioni dei sistemi lineari omogenei

$$\begin{pmatrix} i-\alpha_\pm & 1 \\ -1 & -i-\alpha_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_\pm^1 \\ v_\pm^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dove $v_\pm^j$, con $j = 1, 2$, è la j-esima componente contro-variante dell'autovettore relativo all'autovalore $\alpha_\pm$. Posti $v_\pm^1 = v$, dalla prima equazione si hanno le seconde componenti contro-varianti

$$v_\pm^2 = (\alpha_\pm - i)\,v = i\left(\pm\sqrt{2} - 1\right)v\,,$$

da cui, scegliendo il valore di v in modo da normalizzare all'unità, si hanno

$$v_\pm = v\begin{pmatrix} 1 \\ i\left(\pm\sqrt{2}-1\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2 \mp \sqrt{2}\right)}}\begin{pmatrix} 1 \\ i\left(\pm\sqrt{2}-1\right) \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante è

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} v_-^1 & v_+^1 \\ v_-^2 & v_+^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)} & 1/\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} \\ i\left(-\sqrt{2}-1\right)/\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)} & i\left(\sqrt{2}-1\right)/\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ i\left(-\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2-\sqrt{2}} & i\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} & i\sqrt{3-2\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2+\sqrt{2}} & i\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con questa matrice si possono ottenere le rappresentazioni diagonali delle matrici A e U, si hanno le relazioni

$$A_d = \mathrm{diag}\left(-i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\right) = V^\dagger A V\,, \qquad U_d = \mathrm{diag}\left(e^{-i\sqrt{2}}, e^{i\sqrt{2}}\right) = V^\dagger U V\,,$$

che possono essere invertite, cioè: $A = V A_d V^\dagger$ e $U = V U_d V^\dagger$. Da quest'ultima si ottiene la rappresentazione dell'operatore $\hat{U}$ rispetto alla base canonica la matrice U

$$\begin{aligned} U &= V U_d V^\dagger = V \mathrm{diag}\left(e^{-i\sqrt{2}}, e^{i\sqrt{2}}\right) V^\dagger \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2+\sqrt{2}} & i\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & i\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -i\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} & e^{i\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -ie^{-i\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} & ie^{i\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & i\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -i\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{2}\right) + e^{i\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2}\right) & i\sqrt{2}\left(e^{-i\sqrt{2}} - e^{i\sqrt{2}}\right) \\ -i\sqrt{2}\left(e^{-i\sqrt{2}} - e^{i\sqrt{2}}\right) & e^{-i\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2}\right) + e^{i\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

infine, usando le formule di Eulero per le funzioni trigonometriche

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\right) & \mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\right) \\ -\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\right) & \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si consideri l'operatore $\hat{K}$ in uno spazio di Hilbert L^2, la cui azione su un vettore $|f\rangle \in L^2$, è rappresentata dalla relazione integrale

$$|g\rangle = \hat{K}|f\rangle \hookleftarrow g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,y) f(y)\, dy\,,$$

con $K(x,y) = \mathrm{sen}(x-y)$ e $f(x), g(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, ovvero le funzioni sono a quadrato sommabili in $(-\pi,\pi)$. Dopo aver calcolato la matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base delle fasi $\left\{u_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\pi,\pi)$, si ottengano lo spettro discreto, i vettori in forma matriciale e di funzioni della classe $L^2(-\pi,\pi)$, che rappresentano gli autovettori.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Indicando con K la matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base delle fasi, che è ortonormale, si ha l'elemento (j,m), $\forall\,(j,m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned} K^j_m &= \langle u_j|\hat{K}|u_m\rangle = \left(u_j, \int_{-\pi}^{\pi} K(x,y) u_m(y)\, dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy\, u_j^*(x) K(x,y) u_m(y)\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy\, u_j^*(x)\,\mathrm{sen}(x-y) u_m(y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy\, u_j^*(x) \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} u_m(y)\, dy\,, \end{aligned}$$

poiché si ha $e^{\pm ix} = \sqrt{2\pi}\, u_{\pm 1}(x) = \sqrt{2\pi}\, u^*_{\mp 1}(x)$, gli integrali possono essere interpretati come prodotti scalari, cioè

$$\begin{aligned} K^j_m &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy\, u_j^*(x) \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} u_m(y)\, dy \\ &= \frac{\pi}{i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x) u_1(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} u_1^*(x) u_m(y)\, dy - \int_{-\pi}^{\pi} u_j^*(x) u_{-1}(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} u_{-1}^*(x) u_m(y)\, dy\right) \\ &= -i\pi\left(\left(u_j, u_1\right)\left(u_1, u_m\right) - \left(u_j, u_{-1}\right)\left(u_{-1}, u_m\right)\right) = i\pi\left(\delta_{-1,j}\delta_{-1,m} - \delta_{1,j}\delta_{1,m}\right). \end{aligned}$$

La matrice è effettivamente 2×2 e diagonale è diagonale e proporzionale alla terza matrice di Pauli, ovvero

$$K = i\pi\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -i\pi\sigma_3\,.$$

Gli autovalori $\lambda_\pm$ sono quelli delle matrici di Pauli moltiplicati per il fattore di proporzionalità $-i\pi$, cioè: $\lambda_\pm = \mp i\pi$ e gli autovettori in forma matriciale sono

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine le rappresentazioni funzionali degli stessi autovettori, che indichiamo con le funzioni $v_\pm(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, hanno le serie formali di Fourier

$$v_\pm(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_\pm^k u_k(x), \qquad v_\pm^k = (u_k, v_\pm) = \delta_{\pm 1,k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

quindi

$$v_\pm(x) = \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\mathfrak{I}(x) = \theta(x)x\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(x).$$

Soluzione del sesto Problema

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier, sfruttando la definizione della funzione gradino di Heaviside,

$$\tilde{\mathfrak{I}}(k) = \mathscr{F}_k[\mathfrak{I}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)e^{-ikx}dx.$$

Con la formula di Eulero per la funzione seno e integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{I}}(k) &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x\left(e^{-x(1+ik-i)} - e^{-x(1+ik+i)}\right)dx. \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left[x\left(\frac{e^{-x(1+ik-i)}}{-(1+ik-i)} - \frac{e^{-x(1+ik+i)}}{-(1+ik+i)}\right)_0^\infty - \int_0^\infty\left(\frac{e^{-x(1+ik-i)}}{-(1+ik-i)} - \frac{e^{-x(1+ik+i)}}{-(1+ik+i)}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x(1+ik-i)}}{1+ik-i} - \frac{e^{-x(1+ik+i)}}{1+ik+i}\right)dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x(1+ik-i)}}{-(1+ik-i)^2} - \frac{e^{-x(1+ik+i)}}{-(1+ik+i)^2}\right)_0^\infty \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1+ik-i)^2} - \frac{1}{(1+ik+i)^2}\right) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\frac{4i(1+ik)}{\left((1+ik)^2+1\right)^2},
\end{aligned}$$

in definitiva

$$\tilde{\mathfrak{I}}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1+ik}{\left((1+ik)^2+1\right)^2}.$$