Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 12 giugno 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due problemi, uno dei primi tre e uno degli ultimi tre, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia nell'intervallo $[0, 15/30]$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;

Inoltre, al fine di favorire una preparazione che copra il maggior numero di argomenti del programma, verranno valutati i contributi relativi, premiando i casi in cui il modulo della differenza tra i punteggi dei due problemi sia minimo.

Primo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{ax} + e^{bx}} dx \,,$$

con i parametri a e b reali e tali che $a < 0 < b$.

Soluzione del primo problema

Riscriviamo l'integrale

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 + e^{(b-a)x}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ax}}{1 + e^{cx}} dx \,,$$

dove si è posto $c = b - a > 0$. Facciamo la sostituzione $r = e^{cx}$, ovvero

$$x = \frac{\ln(r)}{c} \,, \qquad dx = \frac{1}{c}\frac{dr}{r} \,,$$

da cui

$$B = \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\ln(r) r^{-a/c-1}}{1+r} dr \,.$$

La funzione integranda ha un polo semplice in $r = -1$ ed è polidroma a causa della presenza della funzione logaritmo e della potenza con esponente non intero $-a/c - 1 \in (-1, 0)$. Si tratta di un numero reale strettamente compreso tra -1 e lo zero, in quanto, avendo per ipotesi la relazione $a < 0 < b$, da cui: $a = -|a|$ e $b = |b|$, si ha

$$-\frac{a}{c} - 1 = -\frac{a}{b-a} - 1 = \underbrace{\frac{|a|}{|b| + |a|}}_{\in(0,1)} - 1 \in (-1, 0) \,.$$

I punti di diramazione sono nell'origine e all'infinito, scegliendo la determinazione principale per cui $\arg(r) \in (0, 2\pi)$, si ha un taglio coincidente con il semi-asse reale positivo. Alla luce di ciò, consideriamo il percorso chiuso

$$\Gamma = L_+ \cup \gamma_R \cup L_- \cup \left(-\gamma_\epsilon\right) \,,$$

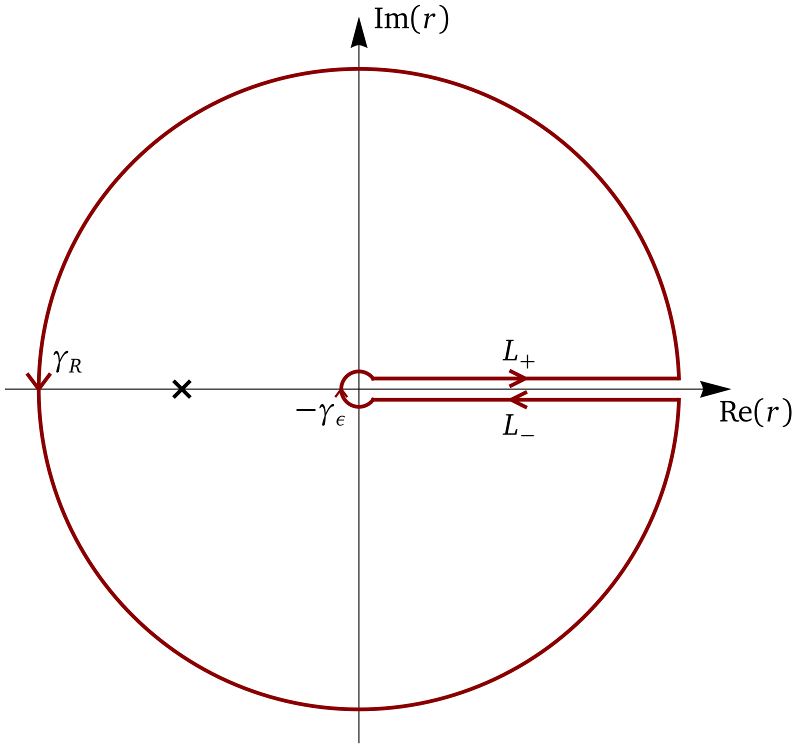
che, come mostrato in figura, è dato dall'unione dei due tratti rettilinei paralleli all'asse reale, ovvero al taglio,

$$L_\pm = [\epsilon \pm i\epsilon, R \pm i\epsilon]$$

e gli archi centrati nell'origine di raggi ϵ e R

$$\gamma_e = \left\{r : r = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\right\}, \qquad \gamma_R = \left\{r : r = Re^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\right\},$$

orientati rispettivamente in senso orario, negativo, e anti-orario, positivo.



Integriamo sul percorso Γ e, usando il teorema dei residui, anche nei limiti $\epsilon \to 0^+$ e $R \to \infty$, si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{\ln(r) r^{-a/c-1}}{1+r} dr = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r}, r = -1\right] = 2i\pi \ln(e^{i\pi}) e^{-i\pi(a/c+1)} = 2\pi^2 e^{-i\pi a/c}.$$

D'altro canto, in termini dei singoli contributi si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr &= \int_0^\infty \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr + \int_\infty^0 \frac{[\ln(r) + 2i\pi]\, r^{-a/c-1} e^{-2i\pi a/c}}{1+r} dr \\
&\quad - \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr \\
&= c^2 B\left(1 - e^{-2i\pi a/c}\right) - 2i\pi e^{-2i\pi a/c} \int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r} dr \\
&\quad - \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} dr \\
&= c^2 B\left(1 - e^{-2i\pi a/c}\right) - 2i\pi e^{-2i\pi a/c} \int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r} dr,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che siano nulli i contributi sugli archi nei limiti considerati. Dimostriamo la nullità di questi contributi verificando che

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} r = \lim_{R\to\infty} \frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r} r \overset{\text{unif.}}{=} 0.$$

Sull'arco γ_ϵ si hanno la limitazione e il valore limite

$$\left|\frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r}r\right| \leq \frac{\sqrt{\ln^2(\epsilon)+4\pi^2}}{|1-\epsilon|}\epsilon^{-a/c} \underset{\epsilon\to 0^+}{\sim} |\ln(\epsilon)|\,\epsilon^{-a/c} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,,$$

il limite è nullo in quanto $0 < -a/c < 1$.
Sull'arco γ_R invece si ha

$$\left|\frac{\ln(r)r^{-a/c-1}}{1+r}r\right| \leq \frac{\sqrt{\ln^2(R)+4\pi^2}}{|R-1|}R^{-a/c} \underset{R\to\infty}{\sim} \ln(R)\,R^{-a/c-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

anche in questo caso il limite è nullo, infatti $-1 < -a/c - 1 < 0$.
Uguagliando le due espressioni ottenute per il valore limite dell'integrale su Γ si ottiene l'integrale cercato come

$$\begin{aligned} B &= -\frac{2i\pi\, e^{-i\pi a/c}}{\left(1-e^{-2i\pi a/c}\right)c^2}\left(i\pi - e^{-i\pi a/c}\int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr\right) \\ &= -\frac{2i\pi}{\left(e^{i\pi a/c}-e^{-i\pi a/c}\right)c^2}\left(i\pi - e^{-i\pi a/c}\int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr\right) \\ &= -\frac{\pi}{c^2\mathrm{sen}(\pi a/c)}\left(i\pi - e^{-i\pi a/c}\int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr\right)\,. \end{aligned}$$

Rimane da calcolare l'ultimo integrale per il quale possiamo usare la formula generale per gli integrali di funzioni polidrome

$$\int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)}\sum_{\text{tot.}}\mathrm{Res}\left[R(z)e^{z^\alpha}, z_k\right]\,,$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale, che non ha poli sul semi-asse reale positivo e che si comporti agli estremi d'integrazione come

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} R_L x^l\,, \qquad R(x) \underset{x\to\infty}{\sim} R_H x^h\,,$$

dove R_L e R_H sono costanti, mentre l e h sono numeri relativi, tali che

$$-1-l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1-h\,.$$

Nel caso in studio l'integrale è

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr\,,$$

la funzione razionale è $R(r) = 1/(1+r)$, ha un polo semplice in $r=-1$, non appartenente quindi al semi-asse reale positivo e il comportamento agli estremi è descritto dalle potenze $l=0$ e $h=-1$. Poiché si ha $\alpha = -a/c-1$, la condizione di convergenza $-1-l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1-h$ diventa

$$-1-l = -1 < \alpha = -\frac{a}{c} - 1 < -1-h = 0\,,$$

coincidente con la condizione data, ovvero $-a/c-1 \in (-1,0)$. Usando la formula nota si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr &= -\frac{\pi e^{-i\pi(-a/c-1)}}{\mathrm{sen}(\pi(-a/c-1))}\mathrm{Res}\left[\frac{r^{-a/c-1}}{1+r}, r=-1\right] = \frac{\pi e^{i\pi a/c}}{\mathrm{sen}(\pi a/c)}e^{i\pi(-a/c-1)} = -\frac{\pi e^{i\pi a/c}}{\mathrm{sen}(\pi a/c)}e^{-i\pi a/c} \\ &= -\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi a/c)}\,. \end{aligned}$$

Usando questo risultato si ha

$$
\begin{aligned}
B &= -\frac{\pi}{c^2 \mathrm{sen}(\pi a/c)}\left(i\pi - e^{-i\pi a/c}\int_0^\infty \frac{r^{-a/c-1}}{1+r}dr\right)\\
&= -\frac{\pi^2}{c^2 \mathrm{sen}(\pi a/c)}\left(i + \frac{e^{-i\pi a/c}}{\mathrm{sen}(\pi a/c)}\right)\\
&= -\frac{\pi^2}{c^2 \mathrm{sen}(\pi a/c)}\left(i + \frac{\cos(\pi a/c) - i\,\mathrm{sen}(\pi a/c)}{\mathrm{sen}(\pi a/c)}\right)\\
&= -\pi^2 \frac{\cos(\pi a/c)}{c^2 \mathrm{sen}^2(\pi a/c)}\,.
\end{aligned}
$$

Infine, in termini dei parametri a e b, ovvero usando $c = b - a$, si ha il risultato definitivo

$$
B = -\pi^2 \frac{\cos(\pi a/(b-a))}{(b-a)^2 \mathrm{sen}^2(\pi a/(b-a))}\,.
$$

Secondo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli la somma della serie

$$
N = \sum_{k=1}^\infty \frac{k^2}{\left(k^2+1\right)^2}\,.
$$

Soluzione del secondo problema

La somma della serie può essere ottenuta usando il metodo dei residui, ovvero possiamo riscrivere

$$
N = \sum_{k=1}^\infty \frac{k^2}{\left(k^2+1\right)^2} = \sum_{k=1}^\infty f(k)\,, \qquad \text{con: } f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}
$$

e considerare l'integrale

$$
S_n = \pi \oint_{C_n} f(z)\frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}dz = \pi \oint_{C_n} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}dz\,,
$$

sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $r_n = n + 1/2$, cioè

$$
C_n = \{z : |z| = r_n = n + 1/2\}\,.
$$

La funzione integranda ha poli nei punti dell'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^\infty \cup \{i, -i\}$, unione dei sottoinsiemi dei poli semplici dovuti alla funzione seno a denominatore dell'integranda e dei due poli doppi della funzione $f(z)$. La singolarità nell'origine è eliminabile, infatti

$$
\lim_{z\to 0} \frac{\pi z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)} = \lim_{z\to 0}\frac{\pi z^2}{\mathrm{sen}(\pi z)} = \lim_{z\to 0} z = 0\,,
$$

ovvero l'origine rappresenta uno zero semplice dell'integranda. Inoltre, sulle circonferenza C_n al divergere di n nei naturali e quindi al divergere del raggio $r_n \to \infty$, la funzione integranda moltiplicata per z tende uniformemente allo zero, infatti

$$
\left|\frac{\pi z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}z\right| \le \left|\frac{\pi z^3}{\left(z^2+1\right)^2}\right| \le \frac{\pi r_n^3}{\left(r_n^2-1\right)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \pi r_n^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
$$

Ne consegue che la successione di integrali $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ converge allo zero, ovvero

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = 0\,.
$$

In generale si ha

$$S_n = \pi \oint_{C_n} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz = \sum_{k=-n}^{-1} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, k \right] + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, k \right]$$
$$+\operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, i \right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, -i \right].$$

I residui sono nei poli semplici dell'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}^{\infty}$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, k \right] = \frac{k^2}{(k^2+1)^2},$$

sono pari rispetto all'indice k, cioè

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, k \right] = \operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, -k \right].$$

Invece, i residui nei poli doppi $z = \pm i$ sono uguali e hanno il valore comune

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\pi z^2}{(z^2+1)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \pm i \right] &= \frac{d}{dz} \frac{\pi z^2}{(z\pm i)^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \bigg|_{z=\pm i} \\
&= \left(\frac{\pm 2 i \pi z}{(z\pm i)^3} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} - \frac{\pi^2 z^2}{(z\pm i)^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} \right) \bigg|_{z=\pm i} \\
&= \frac{-2\pi}{(\pm 2i)^3} \frac{\cos(i\pi)}{\pm\operatorname{sen}(i\pi)} + \frac{\pi^2}{(\pm 2i)^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(i\pi)} \\
&= \frac{\pi}{(\pm 2i)^2} \frac{\cosh(\pi)}{\operatorname{senh}(\pi)} - \frac{\pi^2}{(\pm 2i)^2} \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\pi)} \\
&= -\frac{\pi}{4} \frac{\cosh(\pi)}{\operatorname{senh}(\pi)} + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\pi)} \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)} - \coth(\pi) \right).
\end{aligned}$$

Facendo il limite per $n \to \infty$ della successione infinitesima $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ e usando le espressioni dei residui nei poli degli insiemi $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)} - \coth(\pi) \right),$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\coth(\pi) - \frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)} \right).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si determini la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente in $z = e^{i\pi/4}/2$ della funzione

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^3 - z^2 + z}.$$

Soluzione del terzo problema

Riscriviamo la funzione come

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{(z-1)^2}{z(z^2-z+1)} = \frac{(z-1)^2}{z(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{(z-1)^2}{z}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{1}{z_1-z_2} \\
&= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{1}{z_1-z_2},
\end{aligned}
$$

dove $z_{1,2} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2 = e^{\pm i\pi/3}$ sono, assieme all'origine, i poli semplici della funzione, ovvero gli zeri del polinomio di terzo grade che ne rappresenta il denominatore. I due poli z_1 e z_2 appartengono alla circonferenza unitaria e quindi hanno lo stesso modulo $|z_1| = |z_2| = 1$, ne consegue che la funzione ha due possibili serie di Laurent centrate nell'origine, la prima definita nella corona circolare $D_1 = \{z : 0 < |z| < 1\}$, la seconda nella corona circolare $D_2 = \{z : 1 < |z| < \infty\}$. La serie da determinare è la prima, in quanto se ne richiede la convergenza nel punto $z = e^{i\pi/4}/2$ che, ovviamente, avendo modulo pari a $1/2$, appartiene alla corona circolare D_1.
Ne consegue che possiamo scrivere i due poli semplici $1/(z-z_1)$ e $1/(z-z_2)$ come somme di serie geometriche, in particolare si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{1}{z_1-z_2} \\
&= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{-1/z_1}{1-z/z_1}-\frac{-1/z_2}{1-z/z_2}\right)\frac{1}{z_1-z_2} \\
&= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{z_1^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{z_2^{k+1}}\right)\frac{1}{z_1-z_2},
\end{aligned}
$$

le due serie geometriche di ragioni z/z_1 e z/z_2 convergono nella corona circolare D_1, in quanto, $\forall\, z \in D_1$, si ha

$$
|z| < 1 = |z_{1,2}| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{z}{z_{1,2}}\right| < 1\,.
$$

Usando i valori espliciti dei poli, e le identità: $z_1 z_2 = 1$, $z_1 - z_2 = i\sqrt{3}$, si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{z_1^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{z_2^{k+1}}\right)\frac{1}{z_1-z_2}, = \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(z_1^{k+1}-z_2^{k+1}\right)z^k \\
&= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{(k+1)i\pi/3}-e^{-(k+1)i\pi/3}\right)z^k = \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right)z^k \\
&= \left(z-2+\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}z^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k + \sum_{k=-1}^{\infty}c_{k+1}z^k \\
&= \frac{c_0}{z} + c_1 - 2c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}\right)z^k, \qquad c_k = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Poiché $c_0 = c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, possiamo sommare c_2 così da includere anche il termini "zero" nella serie, cioè

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{c_0}{z} + c_1 - 2c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}\right)z^k = \frac{1}{z} + c_1 - 2c_0 + c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}\right)z^k \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}\right)z^k \\
f(x) &= \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k, \qquad d_k = c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}\,.
\end{aligned}
$$

Cerchiamo una forma più compatta per i coefficienti, usando per le funzioni seno le formula di somma, si ha

$$
\begin{aligned}
d_k &= c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) \left(-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right),
\end{aligned}
$$

da cui la serie

$$
f(x) = \frac{1}{z} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) z^k.
$$

È interessante osservare che per la periodicità della funzione seno si ha una ricorrenza di coefficienti, che si ripetono in gruppi di sei, ovvero, in generale $d_k = d_{k+6}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Ne consegue che possiamo scrivere la serie come

$$
f(x) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_{6k} z^{6k} + d_{6k+1} z^{6k+1} + d_{6k+2} z^{6k+2} + d_{6k+3} z^{6k+3} + d_{6k+4} z^{6k+4} + d_{6k+5} z^{6k+5} \right),
$$

dove i coefficienti sono

$$
\begin{aligned}
d_{6k} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1, \\
d_{6k+1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1, \\
d_{6k+2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(0) = 0, \\
d_{6k+3} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} + \pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, \\
d_{6k+4} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1, \\
d_{6k+5} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\pi) = 0,
\end{aligned}
$$

quindi, si ha anche la seguente forma

$$
f(x) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-z^{6k} - z^{6k+1} + z^{6k+3} + z^{6k+4} \right).
$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 15/30)

Si ottenga la funzione $u(x)$ soluzione dell'equazione integrale

$$\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta'(y)y(x-y)+\frac{\lambda}{y}\right)u(x-y)dy=0\,,$$

con $\lambda>0$ e la condizione al contorno $u(0)=1$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Sfruttiamo, innanzitutto, l'identità formale

$$y\delta'(y)=-\delta(y)\,,$$

che usata nel primo termine dell'integranda dà

$$0=\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta(y)(x-y)+\frac{\lambda}{y}\right)u(x-y)dy=xu(x)+\lambda\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x-y)}{y}dy\,,$$

ovvero l'equazione diventa

$$xu(x)=-\lambda\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x-y)}{y}dy$$

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri, utilizzando il teorema della convoluzione, sia per il prodotto a primo membro che per la convoluzione a secondo membro, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[xu(x)\right]&=-\lambda\,\mathscr{F}_k\left[\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-y)}{y}dy\right]\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k\left[x\right]*\mathscr{F}_k\left[u\right]\right)(k)&=-\sqrt{2\pi}\,\lambda\,\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right]\mathscr{F}_k\left[u\right]\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[x\right]\tilde{u}(k')dk'&=-\sqrt{2\pi}\,\lambda\,\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right]\tilde{u}(k)\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo le trasformate di Fourier della funzione identità e del suo inverso. Per l'identità, possiamo usare la derivazione rispetto alla variabile k e la rappresentazione integrale della distribuzione delta di Dirac, ovvero si ha

$$\mathscr{F}_k\left[x\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-i}\frac{d}{dk}e^{-ikx}dx=i\frac{d}{dk}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx=i\sqrt{2\pi}\frac{d}{dk}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx}_{\delta(k)}$$

da cui si ottiene che la trasformata di Fourier della funzione identità è proporzionale alla derivata prima della delta di Dirac, cioè

$$\mathscr{F}_k\left[x\right]=i\sqrt{2\pi}\,\delta'(k)\,.$$

Per ciò che concerne la trasformata di Fourier della funzione inversa, ricordiamo che è necessario considerare l'integrale in valore principale, che calcoliamo usando la formula di Sokhotsky-Plemelj, si ha quindi

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{z+i\epsilon}dz+i\pi\,e^{-ikx}\Big|_{x=0}\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2i\pi\,\theta(k)\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z+i\epsilon},z=0\right]+i\pi\right)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(2\theta(k)-1\Big)\,.\end{aligned}$$

L'integrale in dz, calcolato usando il lemma di Jordan, dà un contributo non nullo solo quando il percorso di integrazione può essere chiuso nel semipiano della parti immaginarie negative, che accade per valori di k strettamente negativi. Infatti l'unico polo semplice dell'integranda, cioè $z=-i\epsilon$ con $\epsilon>0$, si trova in questa semipiano. Infine, osservando che l'espressione $2\theta(k) - 1$ rappresenta la funzione segno, possiamo scrivere la trasformata di Fourier come

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{segno}(k)\,.$$

Sostituiamo questi risultati nell'equazione trasformata di Fourier, integriamo per parti a primo membro e usiamo le proprietà della delta di Dirac per calcolare l'integrale di convoluzione,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[x\right]\tilde{u}(k')dk' &= -\sqrt{2\pi}\,\lambda\,\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right]\tilde{u}(k)\\
\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(k-k')\tilde{u}(k')dk' &= -\pi\,\lambda\,\text{segno}(k)\,\tilde{u}(k)\\
\underbrace{-\delta(k-k')\tilde{u}(k')\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k')\tilde{u}'(k')dk' &= -\pi\,\lambda\,\text{segno}(k)\,\tilde{u}(k)\\
\tilde{u}'(k) &= -\pi\,\lambda\,\text{segno}(k)\,\tilde{u}(k)\,.
\end{aligned}$$

Si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine che possiamo integrare direttamente

$$\frac{d\tilde{u}}{dk} = -\pi\,\lambda\text{segno}(k)\,\tilde{u}(k) \quad\Rightarrow\quad \int_{\tilde{u}(0)}^{\tilde{u}(k)}\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = -\pi\,\lambda\int_0^k \text{segno}(k')dk' \quad\Rightarrow\quad \tilde{u}(k) = \tilde{u}(0)e^{-\pi\,\lambda|k|}\,,$$

dove abbiamo usato la funzione modulo $|k|$ come primitiva della funzione segno(k). La soluzione $u(x)$ è l'anti-trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
u(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{u}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(k)e^{ikx}dk = \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\lambda|k|}e^{ikx}dk\\
&= \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{k(\pi\lambda+ix)}dk + \int_0^{\infty}e^{k(-\pi\lambda+ix)}dk\right)\\
&= \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\pi\lambda+ix} + \frac{1}{\pi\lambda-ix}\right)\\
&= \frac{\tilde{u}(0)\sqrt{2\pi}\,\lambda}{\pi^2\lambda^2+x^2}\,,
\end{aligned}$$

imponendo la condizione al contorno $u(0) = 1$, si ottiene $\tilde{u}(0) = \lambda\pi\sqrt{\pi/2}$, ovvero

$$u(x) = \frac{\pi^2\lambda^2}{\pi^2\lambda^2+x^2}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si determini lo spettro discreto dell'operatore normale non degenere $\hat{A}$, definito in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni, che verifica l'equazione

$$\hat{A}\left(\hat{A}^3+\hat{I}\right)=0\,.$$

Indicando con $\left\{|a_k\rangle\right\}_{k=1}^4$ l'insieme ortonormale dei sui autovettori e con $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^4$ quello dei corrispondenti autovalori, ordinati in modo tale che

$$\mathrm{Re}(\alpha_k)+\mathrm{Im}(\alpha_k)<\mathrm{Re}(\alpha_{k+1})+\mathrm{Im}(\alpha_{k+1})\,,\qquad k=1,2,3\,;$$

si determini la matrice 4×4 A che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\left\{|e_k\rangle\right\}_{k=1}^4$, sapendo che i prodotti scalari

$$\langle e_k|u_j\rangle=U_j^k\,,\qquad k,j=1,2,3,4\,,$$

sono gli elementi della matrice 4×4

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_3 & \sigma_2\\ \sigma_2^* & -\sigma_3\end{pmatrix},$$

data in notazione a blocchi in termini della seconda e la terza matrice di Pauli, σ_2 e σ_3.
Si determini, infine la traccia dell'operatore

$$\hat{B}=\left(\hat{A}^2+\hat{I}\right)^{-2}\ln\left(\hat{I}-\hat{A}\right)\,.$$

Soluzione del quinto problema

Poiché l'operatore $\hat{A}$ è diagonalizzabile lo sarà anche l'operatore $\hat{A}\left(\hat{A}^3+\hat{I}\right)$, che, per il teorema spettarle, ha l'insieme di autovalori $\left\{\alpha_k\left(\alpha_k^3+1\right)\right\}_{k=1}^4$, dove $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^4$ è l'insieme degli autovalori dell'operatore $\hat{A}$. L'operatore composto $\hat{A}\left(\hat{A}^3+\hat{I}\right)$ è nullo, di conseguenza ha tutti gli autovalori nulli, da questa condizione si ottengono gli autovalori di $\hat{A}$ come soluzioni delle equazioni $\alpha_k\left(\alpha_k^3+1\right)=0$, per $k=1,2,3,4$. Ciascuna equazione ha le stesse quattro soluzioni

$$\alpha_k^{(0)}=0\qquad \alpha_k^{(m)}=e^{(2m-1)i\pi/3}\,,\qquad m=1,2,3\,,$$

ne consegue che, essendo le soluzioni tutte diverse e avendo la libertà di assegnare a ciascun autovalore una molteplicità arbitraria tra l'unità e quattro, si hanno $4^4=256$ operatori diversi che soddisfano l'equazione data. La richiesta di non degenerazione, però, riduce il numero di possibili soluzioni ad una, ovvero all'operatore $\hat{A}$ il cui spettro discreto sia $\left\{0,e^{-i\pi/3},-1,e^{i\pi/3}\right\}$. Ordiniamo gli autovalori come richiesto, ovvero seguendo la gerarchia dei valori ottenuti dalla somma delle loro parti reale e immaginaria. Si hanno

$$\mathrm{Re}(-1)+\mathrm{Im}(-1)=-1\,,\qquad \mathrm{Re}\left(e^{-i\pi/3}\right)+\mathrm{Im}\left(e^{-i\pi/3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\mathrm{Re}(0)+\mathrm{Im}(0)=0\,,\qquad \mathrm{Re}\left(e^{i\pi/3}\right)+\mathrm{Im}\left(e^{i\pi/3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,$$

quindi

$$\alpha_1=-1\,,\qquad \alpha_2=e^{-i\pi/3}\,,\qquad \alpha_3=0\,,\qquad \alpha_4=e^{i\pi/3}\,.$$

La matrice U è la matrice unitaria diagonalizzante, ovvero si ha

$$\hat{A}\overset{e}{\hookleftarrow}A=U^\dagger A_d U\,,\qquad \hat{A}\overset{a}{\hookleftarrow}A_d\,,$$

dove, come indicato A e A_d sono le matrici, rispettivamente, non diagonale e diagonale che rappresentano l'operatore $\hat{A}$ rispetto alle basi ortonormali, generica $\left\{|e_k\rangle\right\}_{k=1}^4$ e degli autovettori $\left\{|a_k\rangle\right\}_{k=1}^4$. Il j-esimo elemento della k-esima colonna della stessa matrice

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

non è altro che la j-esima componente contro-variante del vettore colonna 4×1 che rappresenta il k-esimo autovettore rispetto alla base orto-normale $\left\{|e_k\rangle\right\}_{k=1}^4$. Rispetto a tale base i quattro autovettori hanno le rappresentazioni

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} , \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} , \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice A è

$$\begin{aligned}
A &= U A_d U^\dagger \\
A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -ie^{i\pi/3} \\ 0 & -e^{-i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & ie^{-i\pi/3} & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & e^{i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + e^{i\pi/3} & 0 & 0 & -i - ie^{i\pi/3} \\ 0 & e^{-i\pi/3} & ie^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\pi/3} & e^{-i\pi/3} & 0 \\ i + ie^{i\pi/3} & 0 & 0 & -1 + e^{i\pi/3} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

L'operatore diagonalizzabile $\hat{A}$ ammette quindi la rappresentazione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \hat{P}_k ,$$

dove $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^4$ è l'insieme dei proiettori ortogonali caratteristico dello stesso operatore. L'operatore $\hat{B}$ può essere definito come una funzione dell'operatore $\hat{A}$, ovvero

$$\hat{B} = \hat{f}\left(\hat{A}\right) ,$$

con

$$f(z) = \frac{\ln(1-z)}{\left(z^2+1\right)^2} .$$

Usando il teorema spettrale si ha

$$\hat{B} = \sum_{k=1}^{4} f(\alpha_k) \hat{P}_k ;$$

l'operatore $\hat{B}$ ha gli stessi autovettori dell'operatore $\hat{A}$, mentre l'insieme degli autovalori è $\left\{\hat{f}(\alpha_k)\right\}_{k=1}^4$. Ne consegue che la traccia dell'operatore $\hat{B}$ è

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\hat{B}\right) = \sum_{k=1}^{4} f(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\ln(1-\alpha_k)}{\left(\alpha_k^2+1\right)^2} &= \frac{\ln(1-(-1))}{\left((-1)^2+1\right)^2} + \frac{\ln\left(1-e^{-i\pi/3}\right)}{\left(e^{-2i\pi/3}+1\right)^2} + \frac{\ln(1-0)}{(0+1)^2} + \frac{\ln\left(1-e^{i\pi/3}\right)}{\left(e^{2i\pi/3}+1\right)^2} \\
&= \frac{\ln(2)}{4} + 2\mathrm{Re}\left[\frac{\ln\left(1-e^{i\pi/3}\right)}{\left(e^{2i\pi/3}+1\right)^2}\right] ,
\end{aligned}$$

si ottiene il doppio della parte reale dell'ultimo termine, in quanto il secondo termine non è altro che il suo complesso coniugato. I numeri complessi $\left(1-e^{-i\pi/3}\right)$ e $\left(e^{2i\pi/3}+1\right)$, che compaiono nell'espressione precedente possono essere scritti come fasi pure, ma, mentre la seconda ha una forma univoca, indipendente dalla scelta della determinazione principale, per la prima si hanno due possibilità, infatti

$$1-e^{i\pi/3}=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\begin{cases} e^{-i\pi/3} & \text{determinazione principale} \to [-\pi,\pi) \\ e^{5i\pi/3} & \text{determinazione principale} \to [0,2\pi) \end{cases},$$

$$1+e^{2i\pi/3}=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\pi/3},$$

ne consegue che anche la traccia avrà due possibili valori. Li possiamo calcolare, usando $d_1=-1$ e $d_2=5$, si ha

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{B}\right)_j=\frac{\ln(2)}{4}+2\operatorname{Re}\left[\frac{\ln\left(1-e^{i\pi/3}\right)}{\left(e^{2i\pi/3}+1\right)^2}\right]=\frac{\ln(2)}{4}+\frac{\pi d_j}{3}\operatorname{Re}\left(ie^{-2i\pi/3}\right)=\frac{\ln(2)}{4}+\frac{2\pi d_j}{\sqrt{3}},\qquad j=1,2,$$

ovvero

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{B}\right)=\begin{cases} \dfrac{\ln(2)}{4}-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{determinazione principale} \to [-\pi,\pi) \\ \dfrac{\ln(2)}{4}+\dfrac{5\pi}{\sqrt{3}} & \text{determinazione principale} \to [0,2\pi) \end{cases}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x)=\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Soluzione del sesto Problema

La funzione $f(x)$ può essere scritta come prodotto della funzione seno e la derivata della funzione $-(1/2)/(x^2+1)$, ne consegue che usando il teorema della convoluzione e la formula per la trasformata di Fourier della derivata di una funzione, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f]&=\mathscr{F}_k\left[\mathrm{sen}(x)\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2\,(x^2+1)}\right)\right]=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}(x)]*\mathscr{F}_k\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}\right]\right)(k)\\ &=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}(x)]*ik\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\right)(k).\end{aligned}$$

È quindi necessario calcolare le trasformate di Fourier della funzione seno e della funzione razionale $1/(x^2+1)$. Per la funzione si ha

$$\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}(x)\,e^{-ikx}dx=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)}-e^{-ix(k+1)}\right)dx=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k+1)-\delta(k-1)\right).$$

La trasformata di Fourier della funzione razionale si ottiene integrando nel piano complesso. In particolare, usiamo il lemma di Jordan e il teorema dei residui, chiudendo il percorso nel semipiano della parti immaginarie positive se $k<0$, negative se $k>0$, per cui si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x^2+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{z^2+1}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\begin{matrix} 2i\pi\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{z^2+1},z=i\right]=\pi e^{k} & k<0 \\ -2i\pi\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{z^2+1},z=-i\right]=\pi e^{-k} & k>0\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}.$$

La trasformata di Fourier cercata è

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f\right] &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k\left[\mathrm{sen}(x)\right] * ik\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\right)(k) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k'}\left[\mathrm{sen}(x)\right]\, i(k-k')\mathscr{F}_{k'-k}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]dk' \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\delta(k'+1)-\delta(k'-1)\Big)(k-k')e^{-|k-k'|}dk' \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(k+1)e^{-|k+1|}-(k-1)e^{-|k-1|}\right].
\end{aligned}
$$