Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 12 gennaio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si dimostri che la funzione

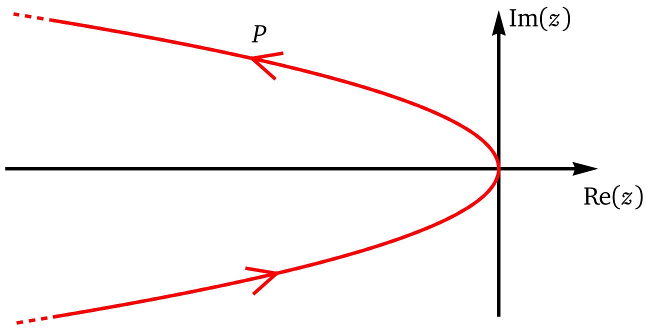
$$f(w) = \frac{1}{\cosh\left(\pi \ln(w)/2\right)},$$

ha rappresentazione integrale

$$\frac{1}{i\pi}\int_P \frac{w^z}{\cos(z)}dz,$$

dove il percorso di integrazione P, di lunghezza infinita, è la parabola mostrata in figura, ovvero:

$$P = \{z : z = -y^2 + iy\,, y \in (-\infty, \infty)\}.$$



Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione può essere chiuso con un arco infinito che interseca l'asse reale negativo tra due poli z_{k-1} e z_k, cioè

$$C_k = \left\{z : z = k\pi e^{i\theta},\, \theta \in \left(\pi - \arctan(1/k\pi), \pi + \arctan(1/k\pi)\right)\right\}.$$

Dimostriamo che il contributo all'integrale di tale arco è nullo al divergere del raggio, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{i\pi}\int_{C_k} \frac{w^z}{\cos(z)}dz = 0. \tag{1}$$

A tal fine è necessario verificare che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{zw^z}{\cos(z)} \overset{\text{unif.}}{=} 0.$$

Scegliendo $w \in (1, \infty)$ si ha, posto: $z = x + iy = k\pi\, e^{i\theta}$,

$$\left|\frac{zw^z}{\cos(z)}\right| = \frac{k\pi w^x}{|\cos(z)|} = \frac{k\pi w^x}{\sqrt{\cos^2(x)\cosh^2(y) + \mathrm{sen}^2(x)\mathrm{senh}^2(y)}} \le \frac{k\pi w^x}{|\cos(x)|\cosh(y)}.$$

Le quantità a denominatore possono essere minorate osservando che la parte reale, x, e il modulo di quella immaginaria, y, di $z \in C_k$ sono minorate come segue

$$-k\pi \le x = k\pi\cos(\theta) \le -k\pi\frac{k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2+1}}, \qquad 0 \le |y| = k\pi\,|\mathrm{sen}(\theta)| \le \frac{k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2+1}}.$$

Ne consegue che

$$|\cos(x)| \ge \left|\cos\left((k\pi)^2/\sqrt{(k\pi)^2+1}\right)\right| > \frac{1}{2},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, e

$$\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \frac{e^{-|y|}}{2} = \frac{e^{-k\pi|\text{sen}(\theta)|}}{2} \geq \frac{e^{-k\pi/\sqrt{(k\pi)^2+1}}}{2} .$$

Infine, definiamo la funzione reale, non negativa e infinitesima al divergere di k che minora il modulo studiato, ovvero

$$\left|\frac{zw^z}{\cos(z)}\right| \leq \frac{k\pi w^x}{|\cos(x)|\cosh(y)} < 4k\pi W^{-(k\pi)^2/\sqrt{(k\pi)^2+1}} e^{k\pi/\sqrt{(k\pi)^2+1}} = 4k\pi \exp\left[-\frac{k\pi(k\pi\ln(w)-1)}{\sqrt{(k\pi)^2+1}}\right] \equiv \mu_k .$$

Avendo $w > 1$ e quindi $\ln(w) > 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0 ,$$

che implica il limite dato in eq. (1).
Alla luce di ciò, l'integrale sul percorso chiuso $P \cup C_\infty$, dove $C_\infty = \lim_{k\to\infty} C_k$, coincide con $f(w)$ e può essere scritto come somma dei residui interni al percorso, cioè, indicando con $\{z_k\}_{k\in S}$ l'insieme dei poli per cui $n(z_k, P \cup C_\infty) = 1$, si ha

$$\frac{1}{i\pi}\int_P \frac{w^z}{\cos(z)} dz = \frac{1}{i\pi}\oint_{P\cup C_\infty} \frac{w^z}{\cos(z)} dz = 2\sum_{k\in S} \text{Res}\left[\frac{w^z}{\cos(z)}, z_k\right] .$$

L'insieme $\{z_k\}_{k\in S}$ contiene tutti i poli del semiasse reale negativo

$$z_k = (-2k-1)\frac{\pi}{2} , \qquad k = 0, 1, \dots .$$

I residui sono

$$\text{Res}\left[\frac{w^z}{\cos(z)}, z_k\right] = \frac{w^{z_k}}{-\text{sen}(z_k)} = (-1)^k w^{-(2k+1)\pi/2} = w^{-\pi/2}\left(-w^{-\pi}\right)^k ,$$

con $w \in (1, \infty)$ si ha $w^{-\pi} \in (0, 1)$, quindi il valore dell'integrale è dato da una serie geometrica

$$\frac{1}{i\pi}\int_P \frac{w^z}{\cos(z)} dz = 2\sum_{k=0}^{\infty} \text{Res}\left[\frac{w^z}{\cos(z)}, z_k\right] = 2w^{-\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-w^{-\pi}\right)^k = \frac{2w^{-\pi/2}}{1+w^{-\pi}} = \frac{2}{w^{\pi/2}+w^{-\pi/2}} ,$$

ovvero

$$f(w) = \frac{1}{\cosh\left(\pi\ln(w)/2\right)} .$$

Poiché la somma della serie è nota in forma analitica, la condizione $w \in (1, \infty)$ può essere rilassata, il dominio di analiticità di $f(w)$ è quello massimale deducibile direttamente dall'espressione ottenuta.

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si dimostri che, per ogni $f(z)$ intera e non costante, la funzione

$$g(z) = f(z)f(1/z)$$

ammette lo sviluppo in serie

$$g(z) = G_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cosh\left(k\ln(z)\right) ,$$

dove G_k è il k-esimo coefficiente dello sviluppo di Laurent di $g(z)$ centrato nell'orgine.

Soluzione del secondo problema

La funzione $g(z)$ è simmetrica rispetto allo scambio $z \to 1/z$, quindi, all'infinito si comporta allo stesso modo che in un intorno dell'origine. La funzione $f(z)$, essendo intera e non costante, ha, necessariamente, una singolarità all'infinito. Ne consegue che $g(z)$ possiede solo due singolarità, nell'origine e all'infinito, e sono dello stesso tipo di quella della funzione $f(z)$. Lo sviluppo di Laurent centrato nell'origine

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k z^k ,$$

converge nella corona circolare $C_{0,\infty} = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Infine, la simmetria rispetto allo scambio $z \to 1/z$, implica che i coefficienti di Laurent siano simmetrici rispetto allo scambio $k \to -k$, ovvero $G_k = G_{-k}$. Ciò si dimostra usando la definizione integrale, cioè

$$G_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_\epsilon} \frac{g(z)}{z^{k+1}} dz ,$$

dove C_ϵ è una circonferenza di raggio ϵ centrata nell'origine (le singolarità sono solo in $z = 0$ e $z = \infty$, quindi il raggio può avere un valore qualsiasi purché $0 < \epsilon < \infty$). Con la sostituzione $w = 1/z$ nella definizione di G_k e usando l'espressione di $g(z)$ in termini di $f(z)$, si ha l'indentità cercata, ovvero

$$G_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)f(1/z)}{z^{k+1}} dz = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{-C_{1/\epsilon}} \frac{f(1/w)f(w)}{w^{-k-1}} \frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_{1/\epsilon}} \frac{f(1/w)f(w)}{w^{-k+1}} dw = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_{1/\epsilon}} \frac{g(w)}{w^{-k+1}} dw = G_{-k} .$$

Alla luce di questo risultato, dalla serie di Laurent si ottiene lo sviluppo desiderata, infatti

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k z^k = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} G_k z^k = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k'=1}^{\infty} G_{-k'} z^{-k'} \\ &= G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(z^k + z^{-k}\right) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(e^{k\ln(z)} + e^{-k\ln(z)}\right) \\ &= G_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k \cosh\left(k\ln(z)\right) . \end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

L'espansione di Weierstrass di una funzione intera, $f(z)$, che abbia un'infinità numerabile di zeri z_k, con $k = 1, 2, \ldots$ e $z_k \neq 0$ $\forall k$, ciascuno di ordine $\beta_k \in \mathbb{N}$ e tali da accumularsi all'infinito è

$$f(z) = f(0)\, e^{z f'(0)/f(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{z\beta_k/z_k} .$$

Si dimostri l'identità

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^4}\right) = \frac{\operatorname{senh}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{\pi^2} ,$$

usando l'espansione di Weierstrass della funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} .$$

Soluzione del terzo problema

La funzione data è intera ed ha zeri semplici in $z_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. La singolarità nell'origine è eliminabile, infatti

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 1 = f(0),$$

inoltre, l'origine non rappresenta uno zero, quindi $f(z)$ può essere espansa alla Weierstrass. Dallo sviluppo in serie nell'origine

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6),$$

si ha che la derivata prima nell'origine è nulla, cioè $f'(0) = 0$. Usando questi risultati, ovvero: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ e $\beta_k = 1$, $\forall\, k$, si ha l'espansione di Weierstrass

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} &= \prod_{k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \prod_{k=-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

Al fine di ottenere quanto richiesto, possiamo considerare il prodotto dei valori della funzione in due opportuni punti z_1 e z_2, ovvero

$$\frac{\operatorname{sen}(z_1)}{z_1} \frac{\operatorname{sen}(z_2)}{z_2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1^2 + z_2^2}{k^2\pi^2} + \frac{z_1^2 z_2^2}{k^4\pi^4}\right),$$

richiedendo che: $z_1^2 z_2^2 = \pi^4$ e $z_1^2 + z_2^2 = 0$, si ottengono i valori di z_1 e z_2

$$z_1 = \pi e^{i\pi/4} \qquad z_2 = \pi e^{-i\pi/4}.$$

Usandoli nell'espressione precedente

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^4}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{2} + i\pi/\sqrt{2}\right) \operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{2} - i\pi/\sqrt{2}\right)}{\pi^2} \\
&= \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{2} + i\pi/\sqrt{2}\right)\right|^2}{\pi^2} \\
&= \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{2}\right) \cosh\left(\pi/\sqrt{2}\right) + i \cos\left(\pi/\sqrt{2}\right) \operatorname{senh}\left(\pi/\sqrt{2}\right)\right|^2}{\pi^2} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) \cosh^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) + \cos^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) \operatorname{senh}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{\pi^2} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) \cosh^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) + \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right)\right) \operatorname{senh}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{\pi^2} \\
&= \frac{\operatorname{senh}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\pi/\sqrt{2}\right)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{P}$, definito in $\mathbb{R}^3$, associa ad un generico vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ il suo prodotto vettoriale con il vettore dato $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, ovvero

$$\hat{P}\vec{v} = \vec{p} \times \vec{v}\,.$$

Si porti in forma matriciale la precedente relazione, si classifichi l'operatore e si determinino gli autovalori, nel caso generale, senza, cioè, specificare il vettore $\vec{p}$.
Si trovino, infine, autovalori e autovettori per $\vec{p} = (1, 0, 2)$.

Soluzione del quarto problema

In forma matriciale, detti P e v, la matrice 3×3 e il vettore colonna 3×1 che rappresentano l'operatore $\hat{P}$ e il vettore $\vec{v}$, si ha

$$\sum_{j=1}^{3} P_{ij} v_j = \sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{ilm} p_l v_m\,,$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore anti-simmetrico. Segue che

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ikj} p_k = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} p_k \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice P è quindi anti-simmetrica e reale, l'operatore $\hat{P}$ è anti-hermitiano.
Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -p_3 & p_2 \\ p_3 & -\lambda & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\lambda\left[\lambda^2 + p_1^2\right] + p_3\left[-\lambda p_3 - p_1 p_2\right] + p_2\left[p_1 p_3 - \lambda p_2\right] &= 0 \\ -\lambda\left[\lambda^2 + p_1^2 + p_3^2 + p_2^2\right] &= 0\,, \end{aligned}$$

e sono

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,.$$

Nel caso in cui $\vec{p} = (1, 0, 2)$, avremo

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}\,.$$

L'autovettore relativo a $\lambda_0 = 0$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

quelli relativi a $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ sono

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{1,2} \\ z_{1,2} \end{pmatrix} = \pm i\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{1,2} \\ z_{1,2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \\ z_{1,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ \mp i\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 5/30)

Si determini la matrice infinita, O, che rappresenta l'operatore differenziale

$$\hat{O} = \text{sen}(x)\,\frac{d^2}{dx^2} + \text{sen}^2(x)\,\frac{d}{dx}\,,$$

definito in $L^2(-\pi,\pi)$, rispetto al sistema ortonormale

$$\left\{ e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}\,.$$

Come esempio, si scriva esplicitamente la m-esima riga della matrice.

Soluzione del quinto problema

Poiché la base è ortonormale, gli elementi della matrice O sono

$$\begin{aligned}
O_{mn} = \left(e_m, \hat{O}e_n\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x)\,\hat{O}e_n(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix(n-m)}}{2\pi}\left(-n^2\,\text{sen}(x) + in\,\text{sen}^2(x)\right)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{in^2}{2}\,\frac{e^{ix(n-m+1)} - e^{ix(n-m-1)}}{2\pi} - \frac{in}{4}\,\frac{e^{ix(n-m+2)} + e^{ix(n-m-2)} - 2e^{ix(n-m)}}{2\pi}\right)\,dx\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Sfruttando la condizione di ortonormalità

$$\delta_{j,k} = \left(e_j, e_k\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix(k-j)}}{2\pi}dx\,,$$

ciascun termine dell'integrale di eq. (2) può essere calcolato in termini di una delta di Kronecker come

$$\begin{aligned}
O_{mn} = \left(e_m, \hat{O}e_n\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{in^2}{2}\,\frac{e^{ix(n-m+1)} - e^{ix(n-m-1)}}{2\pi} - \frac{in}{4}\,\frac{e^{ix(n-m+2)} + e^{ix(n-m-2)} - 2e^{ix(n-m)}}{2\pi}\right)\,dx \\
&= \frac{in^2}{2}\left(\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1}\right) - \frac{in}{4}\left(\delta_{m,n+2} + \delta_{m,n-2} - 2\delta_{m,n}\right)\,.
\end{aligned}$$

La m-esima riga della matrice O è

$$O_m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\frac{i(m-2)}{4} & \frac{i(m-1)^2}{2} & \frac{im}{2} & -\frac{i(m+1)^2}{2} & -\frac{i(m+2)}{4} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si usi il metodo della serie di Neumann per risolvere l'equazione integrale

$$f(x) = \alpha \int_0^{1/2} e^{x-y} f(y)dy + \phi(x)\,,$$

dove $f(x)$ è la funzione incognita e $\phi(x)$ è un generico termine noto.
Si calcoli esplicitamente $f(x)$ nel caso in cui $\phi(x) = x^2$.

Soluzione del sesto Problema

L'equazione può essere posta nella forma operatoriale

$$|f\rangle = \alpha\hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle\,,$$

i vettori "ket" rappresentano la funzione incognita $f(x)$ e il termine noto $\phi(x)$, mentre l'operatore $\hat{K}$ rappresenta l'integrazione. In particolare

$$\hat{K}|f\rangle \hookleftarrow \int_0^{1/2} K(x,y)f(y)dy\,, \qquad K(x,y) = e^{x-y}\,.$$

La soluzione formale dell'equazione è

$$\left(\hat{I} - \alpha\hat{K}\right)^{-1}|\phi\rangle = |f\rangle\,,$$

se, inoltre, $||\alpha\hat{K}|| < 1$, l'operatore risolvente può essere sviluppato in serie di Neumann, la serie è quella geometrica ed è convergente, si ha cioè

$$\left(\hat{I} - \alpha\hat{K}\right)^{-1}|\phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\hat{K}\right)^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha\hat{K}\right)^k,$$

La norma dell'operatore è

$$||\hat{K}|| = \sqrt{\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}|K(x,y)|^2 dx dy} = \sqrt{\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} e^{2(x-y)}dx dy} = \sqrt{\int_0^{1/2}\frac{1}{2}\left(e^{1-2y} - e^{-2y}\right)dy} = \frac{e-1}{2\sqrt{e}}\,.$$

La serie di Neumann converge per valori di α tali che

$$|\alpha| < \frac{1}{||\hat{K}||} = \frac{2\sqrt{e}}{e-1} \simeq 1.92\,. \tag{3}$$

L'azione di una potenza intera dell'operatore $\hat{K}$ si può dedurre come segue. Consideriamo innanzitutto $\hat{K}^2$,

$$\begin{aligned}\hat{K}^2|f\rangle \hookleftarrow \int_0^{1/2} dx'\,K(x,x')\int_0^{1/2} dy\,K(x',y)f(y) &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^{1/2} K(x,x')K(x',y)dx'\right)f(y)dy\\ &= \int_0^{1/2} K_2(x,y)f(y)dy\,,\end{aligned}$$

ovvero, l'operatore $\hat{K}^2$ è rappresentato dal nucleo

$$\hat{K}^2 \hookleftarrow K_2(x,y) = \int_0^{1/2} K(x,x')K(x',y)dx'\,.$$

In generale, per un potenza intera $n \in \mathbb{N}$, si avrà

$$\hat{K}^n \hookleftarrow K_n(x,y) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\int_0^{1/2} dx_k\right)K(x,x_1)K(x_1,x_2)\cdots K(x_{n-1},y) = \int_0^{1/2} K(x,x')K_{n-1}(x',y)dx'\,.$$

Nel caso in esame, con $K(x,y) = e^{x-y}$ e, per $n \geq 1$, si ha

$$K_n(x,y) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\int_0^{1/2} dx_k\right)e^{x-x_1}e^{x_1-x_2}\cdots e^{x_{n-1}-y} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\int_0^{1/2} dx_k\right)e^{x-y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{x-y}\,.$$

La serie di Neumann è

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\hat{K})^k \hookleftarrow \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k K_k(x,y) = e^{x-y}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{2^{k-1}} = \alpha\, e^{x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k = \frac{2\alpha\, e^{x-y}}{2-\alpha}\,,$$

la serie geometrica converge in quanto, grazie alla condizione di eq. (3), la ragione ha modulo minore di uno, infatti $|\alpha/2| < \sqrt{e}/(e-1) \simeq 0.96$.
Infine, la soluzione è data da

$$f(x) = \phi(x) + \frac{2\alpha}{2-\alpha}\int_0^{1/2} e^{x-y}\phi(y)dy\,.$$

Nel caso in cui $\phi(x) = x^2$, avremo come soluzione la funzione

$$f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{2-\alpha}\int_0^{1/2} e^{x-y}y^2 dy = x^2 + \frac{2\alpha\, e^x}{2-\alpha}\int_0^{1/2} e^{-y}y^2 dy = x^2 + \frac{2\alpha\, e^x}{2-\alpha}\left(2 - \frac{13}{4\sqrt{e}}\right).$$