Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 12 aprile 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Omega = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3\,(z^2+2\,\mathrm{sen}(z))}\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa, essendo rapporto di funzioni intere e ha singolarità polari nell'origine, che rappresenta un polo di ordine 4 e nei punti dell'insieme $\{z_k\}_{k=1}^N$, non contenente l'origine, che verificano l'equazione

$$z_k^2 + 2\,\mathrm{sen}(z_k) = 0\,.$$

Il numero N di tali punti può essere ottenuto usando il teorema di Eugène Rouché. Il suddetto teorema afferma che, date le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ analitiche in un dominio chiuso e semplicemente connesso $\bar{D}$, tali che: $|f(z)| > |g(z)|$, $\forall\, z \in \partial D$, ovvero sulla frontiera di D, allora, la funzione $f(z)$ e la somma $f(z)+g(z)$ hanno lo stesso numero di zeri nel dominio aperto D. Nel caso in esame consideriamo le funzioni

$$f(z) = 2\,\mathrm{sen}(z)\,, \qquad g(z) = z^2\,,$$

e, come dominio, i disco unitario $D = \{z : |z| < 1\}$, la cui frontiera è la circonferenza unitaria $\partial D = \{z : |z| = 1\}$. I moduli delle funzioni su di essa sono

$$\begin{aligned} |f(z)| &= 2\,|\mathrm{sen}(z)| = 2\left|\mathrm{sen}\left(e^{i\theta}\right)\right|\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,\\ |g(z)| &= \left|z^2\right| = 1 \end{aligned}$$

Studiamo il modulo quadro della funzione $f(z)$ sulla circonferenza unitaria. Avvalendoci delle formule si somma delle funzioni trigonometriche e dell'identità fondamentale delle funzioni iperboliche, esso può essere espresso come

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= 2\,|\mathrm{sen}\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))| = 2\,|\mathrm{sen}(\cos(\theta))\cos(i\mathrm{sen}(\theta)) + \cos(\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(i\mathrm{sen}(\theta))|^2\\ &= 2\,|\mathrm{sen}(\cos(\theta))\cosh(\mathrm{sen}(\theta)) + i\cos(\cos(\theta))\,\mathrm{senh}(\mathrm{sen}(\theta))|^2\\ &= 2\left[\mathrm{sen}^2(\cos(\theta))\cosh^2(\mathrm{sen}(\theta)) + \cos^2(\cos(\theta))\,\mathrm{senh}^2(\mathrm{sen}(\theta))\right]\\ &= 2\left[\mathrm{sen}^2(\cos(\theta))\cosh^2(\mathrm{sen}(\theta)) + \left(1-\mathrm{sen}^2(\cos(\theta))\right)\mathrm{senh}^2(\mathrm{sen}(\theta))\right]\\ &= 2\left[\mathrm{sen}^2(\cos(\theta))\left(\cosh^2(\mathrm{sen}(\theta)) - \mathrm{senh}^2(\mathrm{sen}(\theta))\right) + \mathrm{senh}^2(\mathrm{sen}(\theta))\right]\\ &= 2\left[\mathrm{sen}^2(\cos(\theta)) + \mathrm{senh}^2(\mathrm{sen}(\theta))\right], \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,. \end{aligned}$$

È una funzione periodica con periodo π, i punti estremali sono quelli in cui si annulla la derivata prima,

$$\frac{d\,|f(z)|^2}{d\theta} = 4\left[-\mathrm{sen}(\cos(\theta))\cos(\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta) + \mathrm{senh}(\mathrm{sen}(\theta))\cosh(\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta)\right],$$

coincidono con gli zeri nella fase θ delle funzioni seno e coseno, infatti, quando il seno di θ è nullo, il primo termine si annulla in quanto è proporzionale a $\operatorname{sen}(\theta)$ e il secondo in proporzionale a $\operatorname{senh}(\operatorname{sen}(\theta))$. Quando, invece, si annulla la funzione $\cos(\theta)$, il primo termine si annulla in virtù della presenza della funzione $\operatorname{sen}(\cos(\theta))$, il secondo per la presenza della stessa funzione $\cos(\theta)$. Ne consegue che l'insieme dei punti estremali appartenenti all'intervallo $[0,2\pi)$ è $\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}=\{\theta_k=k\pi/2\}_{k=0}^{3}$. Per identificare i massimi e i minimi, piuttosto che usare il segno della derivata seconda, calcoliamo direttamente i valori della funzione $|f(z)|^2$ in tali punti e si hanno

$$\left|f\left(e^{ik\pi/2}\right)\right|^2=\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2(\pm1)=2\operatorname{sen}^2(1)\simeq 1,416 & k=0,2\\[2ex] 2\operatorname{senh}^2(\pm1)=2\operatorname{senh}^2(1)\simeq 2.762 & k=1,3\end{cases}$$

si hanno minimi in $\theta_0=0$ e $\theta_2=\pi$, massimi in $\theta_1=\pi/2$ e $\theta_3=3\pi/2$. Ovviamente per il modulo si avranno gli stessi estremi e i valori minimi e massimi sono

$$\left|f\left(e^{ik\pi/2}\right)\right|=\begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{sen}(1)\simeq 1,190 & k=0,2\\[2ex] \sqrt{2}\operatorname{senh}(1)\simeq 1.662 & k=1,3\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad |f(z)|>1=|g(z)|\,,\qquad \forall\, z\in\partial D\,.$$

La disuguaglianza indica che l'ipotesi del teorema di Eugène Rouché riguardante la gerarchia tra i moduli delle funzioni sulla frontiera del dominio, rappresentato in questo caso dal disco unitario, è verificata. Ne consegue che le due funzioni $f(z)=2\operatorname{sen}(z)$ e $f(z)+g(z)=z^2+2\operatorname{sen}(z)$ hanno lo stesso numero di zeri nel disco unitario (aperto), ovvero avvolti dalla circonferenza unitaria. Gli zeri della funzione seno sono i punti dell'insieme $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ed è banale verificare che solo uno di essi, ovvero l'origine, con $k=0$, appartiene al disco unitario D, da cui si deduce che la funzione somma ha nello stesso dominio un unico zero. Il fatto che anch'esso sia nell'origine non è conseguenza del teorema, che fornisce solo il numero degli zeri, non la posizione.
Alla luce di quanto dedotto, sia ha

$$\Omega=2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3\left(z^2+2\operatorname{sen}(z)\right)},z=0\right],$$

cioè, il valore dell'integrale è dato dal solo residuo nell'origine, che, come detto, rappresenta un polo di ordine 4 per la funzione integranda. Calcoliamo il residuo come coefficiente della potenza z^{-1} delle serie di Laurent della funzione integranda, centrata nell'origine e convergente in un suo intorno. Alcuni termini della serie di Laurent, tra i quali c'è quello cercato, possono essere ottenuti con semplici considerazioni algebriche, sfruttando le serie di Taylor note delle funzioni che compaiono a numeratore e denominatore della funzione integranda. Nel caso in esame, sfruttiamo la serie di Taylor della funzione seno e la somma della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3\left(z^2+2\operatorname{sen}(z)\right)}&=\frac{1}{2z^4\left(z/2+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{2j}/(2j+1)!\right)}=\frac{1}{2z^4\left(1+z/2-z^2/3!+z^4/5!+\mathcal{O}\left(z^6\right)\right)}\\ &=\frac{1}{2z^4}\left[1+\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^4\right)\right)+\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^4\right)\right)^2+\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\mathcal{O}\left(z^4\right)\right)^2+\cdots\right]\\ &=\cdots+\frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{2}\frac{1}{3!}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)\frac{1}{z}+\cdots=\cdots-\frac{7}{48}\frac{1}{z}+\cdots,\end{aligned}$$

da cui

$$\Omega=2i\pi\left(-\frac{7}{48}\right)=-\frac{7i\pi}{24}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Lambda=\int_0^{\infty}\frac{x^{5+i}}{x^{32}+1}dx\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma, la discontinuità è generata dalla potenza x^i a numeratore, possiamo usare la formula risolutiva nota per integrali del tipo

$$\int_0^\infty R(x)\,x^\alpha dx = -\frac{e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)z^\alpha, z_k\right],$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ e dove $R(x)$ è una funzione razionale avente poli nei punti dell'insieme $\{z_k\}_{k=1}^n$, che non reali positivi, ovvero non ci sono poli lungo il percorso d'integrazione. Ovviamente, per avere un integrale finito, le condizioni di convergenza agli estremi del percorso d'integrazione, ovvero nei limiti: $x \to 0^+$ e $x \to \infty$, sono verificate. Nel caso considerato le condizioni sono verificate, infatti

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^{5+i}}{x^{32}+1} = 0\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{5+i}}{x^{32}+1} = 0\,.$$

La parte razionale e la potenza che genera la polidromia nel caso in esame sono

$$R(x) = \frac{x^5}{x^{32}+1}\,, \qquad \alpha = i\,.$$

La funzione razionale ha solo poli semplici, sono le 32 radici trentaduesime di -1, ovvero

$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/32}\,, \qquad k \in \{0,1,\ldots,31\}\,.$$

I residui corrispondenti sono

$$\operatorname{Res}\left[R(z)z^\alpha, z_k\right] = \frac{z_k^{5+i}}{32 z_k^{31}} = -\frac{z_k^{6+i}}{32} = -\frac{e^{(2k+1)i\pi(6+i)/32}}{32}\,, \qquad k \in \{0,1,\ldots,31\}\,,$$

la seconda identità si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per z_k e sfruttando il fatto che $z_k^{32} = -1$, $\forall\, k \in \{0,1,\ldots,31\}$. Il valore dell'integrale è

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -\frac{\pi e^\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\sum_{k=0}^{31}\operatorname{Res}\left[R(z)z^\alpha, z_k\right] = \frac{\pi e^\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{e^{i\pi(6+i)/32}}{32}\sum_{k=0}^{31}\left(e^{i\pi(6+i)/16}\right)^k \\
&= \frac{\pi e^\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{e^{i\pi(6+i)/32}}{32}\frac{e^{i\pi(6+i)32/16}-1}{e^{i\pi(6+i)/16}-1} = \frac{\pi e^\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{1}{32}\frac{e^{2i\pi(6+i)}-1}{e^{i\pi(6+i)/32}-e^{-i\pi(6+i)/32}} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{1}{32}\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2i\operatorname{sen}\left(\pi(6+i)/32\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{1}{32}\frac{2i\operatorname{sen}(i\pi)}{2i\operatorname{sen}\left(\pi(6+i)/32\right)}\,,
\end{aligned}$$

con le opportune semplificazioni si ha il risultato finale

$$\Lambda = \frac{\pi/32}{\operatorname{sen}\left(\pi(6+i)/32\right)}\,.$$

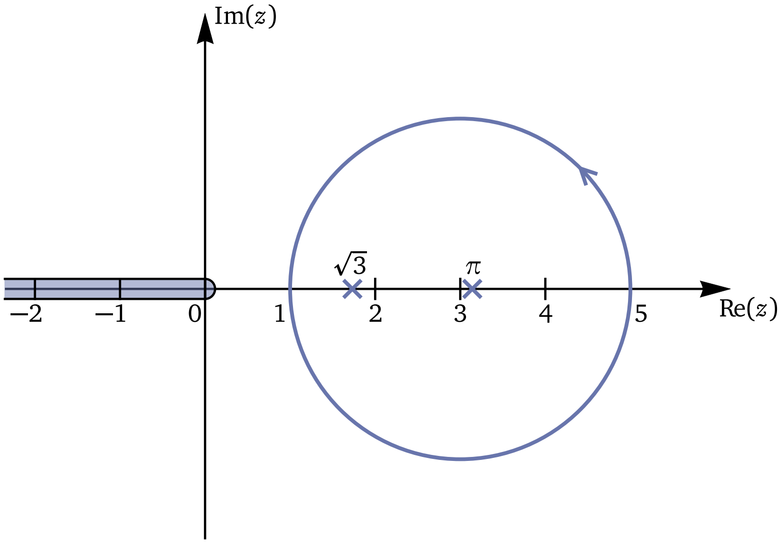
Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Delta = \oint_{|z-3|=2}\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\operatorname{sen}^2(z)}dz\,.$$

Soluzione del terzo problema

La presenza della funzione logaritmo naturale fa sì che la funzione integranda sia polidroma. I punti di diramazione sono l'origine del piano complesso, cioè $z = 0$ e il punto all'infinito $z = \infty$. Inoltre, si hanno i due poli semplici $z_\pm = \pm\sqrt{3}$ e l'insieme di poli doppi $\{z_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in corrispondenza, rispettivamente, degli zeri semplici del polinomio di secondo grado e del quadrato della funzione seno il cui prodotto rappresenta il denominatore della funzione



integranda. Di conseguenza, il dominio di analiticità D della funzione integranda si ottiene escludendo dal piano complesso una curva continua e aperta, avente per estremi i punti di diramazione e tutti i poli, si ha quindi

$$D = \mathbb{C} \backslash \left(\left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\} \cup \{ z_k = k\pi \}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{ z : \arg(z) = -\pi \} \right) ,$$

dove $\{z : \arg(z) = -\pi\}$ rappresenta la regione di discontinuità coincidente con il semiasse reale negativo, per cui si definisce la determinazione principale: $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$.
Il percorso d'integrazione è la circonferenza centrata in $z = 3$, di raggio 2 e orientata in verso anti-orario, ovvero $\left\{ z : z = 3 + 2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$. È rappresentata in figura in colore avio. Il percorso d'integrazione, quindi, non interseca la regione di discontinuità e avvolge una sola volta il polo doppio $z_1 = \pi$ e il polo singolo $z_+ = \sqrt{3}$, indicati in figura dai simboli "×", sempre in colore avio. Ne consegue che il valore dell'integrale può essere ottenuto con il teorema dei residui come

$$\Delta = 2i\pi \left(\text{Res}\left[\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\text{sen}^2(z)}, z = \sqrt{3} \right] + \text{Res}\left[\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\text{sen}^2(z)}, z = \pi \right] \right) .$$

Il residuo del polo semplice $z_+ = \sqrt{3}$ vale

$$\text{Res}\left[\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\text{sen}^2(z)}, z = \sqrt{3} \right] = \lim_{z \to \sqrt{3}} \frac{\ln(z)\left(z - \sqrt{3}\right)}{(z^2-3)\,\text{sen}^2(z)} = \frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\,\text{sen}^2\left(\sqrt{3}\right)} .$$

Quello nel polo doppi $z_1 = \pi$ può essere calcolato come coefficiente della potenza $(z-\pi)^{-1}$ della serie di Laurent della funzione integranda centrata nel polo $z_1 = \pi$ e convergente in un suo introno. Per ottenere tale coefficiente sfruttiamo le serie di Taylor della funzione seno e di della funzione integranda moltiplicato per essa, ovvero

$$\text{sen}(z-\pi) = -\text{sen}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} , \qquad \frac{\ln(z)}{z^2-3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\pi)^k ,$$

con i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \frac{\ln(z)}{z^2-3} \bigg|_{z=\pi} , \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

La funzione $\ln(z)/\left(z^2-3\right)$ è analitica in un intorno del del polo doppio $z_1 = \pi$ e quindi ammette lo sviluppo in serie di Taylor centrato nello stesso polo, esso converge nel disco di raggio $\left(\pi - \sqrt{3}\right)$, ovvero in $\left\{ z : |z-\pi| < \pi - \sqrt{3} \right\}$.

Usando i risultati precedenti, per lo sviluppo di Laurent della funzione integranda si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\mathrm{sen}^2(z)} = \frac{\ln(z)}{(z^2-3)}\frac{1}{\mathrm{sen}^2(z-\pi)} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-\pi)^k \frac{1}{\left[z-\pi-(z-\pi)^3/3!+(z-\pi)^5/5!+\mathscr{O}\left((z-\pi)^7\right)\right]^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-\pi)^{k-2} \frac{1}{\left[1-(z-\pi)^2/3!+(z-\pi)^4/5!+\mathscr{O}\left((z-\pi)^6\right)\right]^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-\pi)^{k-2} \left[1+\left(\frac{(z-\pi)^2}{3!}-\frac{(z-\pi)^4}{5!}+\mathscr{O}\left((z-\pi)^6\right)\right)\right. \\
&\qquad \left.+\left(\frac{(z-\pi)^2}{3!}-\frac{(z-\pi)^4}{5!}+\mathscr{O}\left((z-\pi)^6\right)\right)^2+\cdots\right]^2 .
\end{aligned}
$$

Nel secondo fattore, ovvero il quadrato della quantità tra parentesi quadra, si hanno solo potenze pari, oltre al termine costate, coincidente con l'unità. Visto, inoltre, che la prima serie ha come potenza minima $(z-\pi)^{-2}$, il coefficiente della potenza $(z-\pi)^{-1}$ si ottiene unicamente come prodotto del coefficiente a_1 con il termine costante del secondo fattore, cioè l'unità, quindi, avendo

$$
a_1 = \frac{d}{dz}\frac{\ln(z)}{z^2-3}\bigg|_{z=\pi} = \frac{\left(z^2-3\right)/z-2z\ln(z)}{(z^2-3)^2}\bigg|_{z=\pi} = \frac{\pi^2\left(1-2\ln(\pi)\right)-3}{\pi\left(\pi^2-3\right)^2} ,
$$

la serie di Laurent della funzione integranda è

$$
\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\mathrm{sen}^2(z)} = \cdots + \frac{\pi^2\left(1-2\ln(\pi)\right)-3}{\pi\left(\pi^2-3\right)^2}\frac{1}{z-\pi}+\cdots .
$$

Finalmente, il residuo nel polo doppio $z_1=\pi$ vale

$$
\mathrm{Res}\left[\frac{\ln(z)}{(z^2-3)\,\mathrm{sen}^2(z)}, z=\pi\right] = \frac{\pi^2\left(1-2\ln(\pi)\right)-3}{\pi\left(\pi^2-3\right)^2} ,
$$

da cui l'integrale cercato

$$
\Delta = 2i\pi\left(\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{3}\right)}+\frac{\pi^2\left(1-2\ln(\pi)\right)-3}{\pi\left(\pi^2-3\right)^2}\right) .
$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che la funzione

$$
\tilde{f}(k) = \frac{a\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}\,(ik)^{-a-1} ,
$$

è la trasformata di Fourier della funzione

$$
f(x) = \theta(x)\,x^a ,
$$

per valori complessi del parametro a tali che: $\mathrm{Re}(a) > -1$ e dove $\Gamma(a)$ e $\theta(x)$ sono rispettivamente la funzione Gamma di Leonhard Euler e la funzione gradino di Oliver Heaviside.

Suggerimento. Potrebbe essere di aiuto calcolare l'integrale della trasformata di Fourier nel primo e quarto quadrante del piano complesso, avvalendosi dei lemmi di integrazione sugli archi con raggi divergenti.

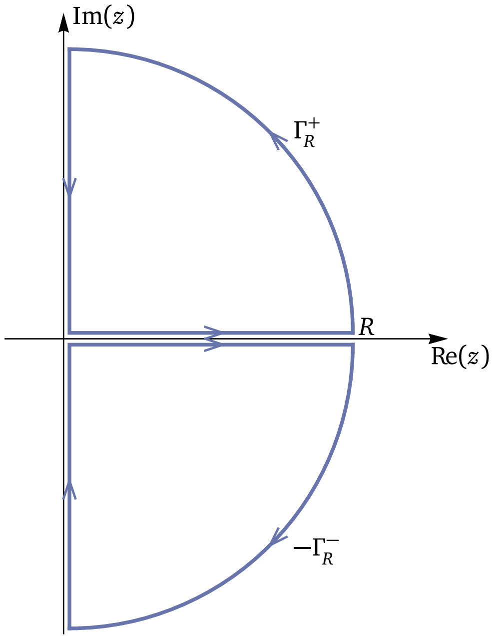
Soluzione del quarto problema

Come conseguenza della presenza della funzione a gradino si ha che l'intervallo di integrale della trasformata di Fourier si riduce al semiasse reale positivo, cioè

$$
\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)x^a e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^a e^{-ikx}dx .
$$

Seguendo il suggerimento, per valori positivi e negative della variabile k consideriamo rispettivamente i percorsi chiusi

$$\pm\Gamma_R^{\pm} = [0,R] \cup \left\{z : z = Re^{\pm i\theta}, \theta \in [0,\pi/2]\right\} \cup [\pm iR, 0],$$



dove con il simbolo $[z_1, z_2]$ indichiamo il tratto rettilineo che unisce i punti z_1 e z_2 ed è orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. I percorsi sono mostrati nella figura di destra.
Consideriamo il valore limite della funzione integranda, che indichiamo con $f(z)$, moltiplicata per la variabile z sugli archi dei due percorsi chiusi $\Gamma_R^{\pm}$. Posto $z = Re^{\pm i\theta}$, con $\theta \in [0,\pi/2]$, si ha

$$\begin{aligned}|f(z)z| = \left|z^{a+1}e^{-ikz}\right| &= R^{\mathrm{Re}(a)+1}e^{\mp\theta\,\mathrm{Im}(a)}e^{\pm kR\,\mathrm{sen}(\theta)} \\ &\le R^{\mathrm{Re}(a)+1}e^{\pi|\mathrm{Im}(a)|/2}e^{\pm kR\,\mathrm{sen}(\theta)},\end{aligned}$$

consideriamo separatamente i due casi con $k < 0$ e $k > 0$. Per valori negativi di k, cioè $k = -|k|$, usiamo il percorso Γ_R^+, ovvero il segno alto nell'ultimo esponenziale, quindi, nel limite $R \to \infty$, si ha

$$|f(z)z| \le R^{\mathrm{Re}(a)+1}e^{\pi|\mathrm{Im}(a)|/2}e^{-|k|R\,\mathrm{sen}(\theta)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergenza a zero è assicurata dalla stretta positività della funzione seno ad esponente dell'ultimo esponenziale.
Invece, per valori positivi della variabile k, cioè $k = |k|$, usiamo il percorso chiuso Γ_R^- e nel limite $R \to \infty$ si ha la stessa maggiorazione del caso precedente, infatti

$$|f(z)z| \le R^{\mathrm{Re}(a)+1}e^{\pi|\mathrm{Im}(a)|/2}e^{-|k|R\,\mathrm{sen}(\theta)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I percorsi chiusi $\Gamma_R^{\pm}$ sono contenuti nel dominio di analiticità della funzione integranda che, per valori del parametro a tali che: $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ (si ha la condizione $\mathrm{Re}(a) > -1$), è polidroma con punti di diramazione nell'origine e all'infinito, mentre è intera in ogni altro caso, ovvero quando $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ne consegue che, usando come determinazione principale $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$, cosicché il taglio coincida con il semiasse reale negativo, è possibile applicare il teorema di Cauchy per gli integrali su entrambi i percorsi e si ha

$$0 = \oint_{\Gamma_R^{\pm}} z^a e^{-ikz}dz \quad \underset{\forall R\in(0,\infty)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R^{\pm}} z^a e^{-ikz}dz,$$

dove, come indicato, la nullità dell'integrale anche nel limite di raggio infinito è conseguenza dell'arbitrarietà dello stesso raggio R. Se consideriamo i contributi dei due tratti rettilinei e dell'arco, che indichiamo con $\gamma_R^{\pm}$, di cui sono costituiti, i percorsi chiusi $\Gamma_R^{\pm}$, e usando Γ_R^+, quando $k < 0$, cioè $k = -|k|$ e Γ_R^-, quando $k > 0$, cioè $k = \pm|k|$, si ha

$$\begin{aligned}0 = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R^{\pm}} z^a e^{\pm i|k|z}dz &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R x^a e^{-ikx}dx + \int_{\pm\gamma_R^{\pm}} z^a e^{\pm i|k|z}dz + \int_R^0 (\pm iy)^a\, e^{-|k|y}(\pm i dy)\right) \\ &= \int_0^\infty x^a e^{-ikx}dx - (\pm i)^{a+1}\int_0^\infty y^a e^{-|k|y}dy \\ &= \{\text{sostituzione: } t = |k|y\} \\ &= \int_0^\infty x^a e^{-ikx}dx - \left(\frac{\pm i}{|k|}\right)^{a+1}\int_0^\infty t^a e^{-t}dt.\end{aligned}$$

I due segni dell'unità immaginaria, alto e basso, sono relativi rispettivamente ai due casi: $k < 0$ e $k > 0$, per cui si ha $|k| = \mp k$, quindi,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty x^a e^{-ikx} dx - \left(-\frac{i}{k}\right)^{a+1} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty x^a e^{-ikx} dx - \left(\frac{1}{ik}\right)^{a+1} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty x^a e^{-ikx} dx - (ik)^{-a-1} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt \,, \end{aligned}$$

quindi l'integrale della trasformata di Fourier è

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^a e^{-ikx} dx = \frac{(ik)^{-a-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt \,.$$

L'integrale nella variabile t, nella condizione $\mathrm{Re}(a) > -1$, è la rappresentazione della funzione Gamma di Leonhard Euler valutata in $a+1$, cioè

$$\tilde{f}(k) = \frac{(ik)^{-a-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{\sqrt{2\pi}} (ik)^{-a-1} \,,$$

infine, usando la legge di ricorrenza $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, si arriva alla forma richiesta

$$\tilde{f}(k) = \frac{a\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}} (ik)^{-a-1} \,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determinino lo spettro discreto σ_A e gli autovettori dell'operatore $\hat{A}$ definito in uno spazio vettoriale di Hilbert a tre dimensioni H_3, sapendo che $\sigma_A \subset \mathbb{Z}$ e che la matrice 3×3 che lo rappresenta rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si ottenga, inoltre la matrice P, 3×3, che rappresenta, rispetto alla stessa base canonica, l'operatore $\hat{P}$ tale che, indicando con $|u_1\rangle$ l'autovettore relativo al minore degli autovalori, si abbia

$$\hat{P}|x\rangle = |u_1\rangle \,,$$

$\forall\, |x\rangle \in H_3$ non ortogonale all'autovettore $|u_1\rangle$, cioè, tale che: $\langle u_1|x\rangle \neq 0$.

Soluzione del quinto problema

L'equazione secolare, le cui soluzioni sono gli autovalori ovvero gli elementi dell'insieme spettro discreto σ_A, è

$$\begin{aligned} \det(A - I\lambda) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -2 \\ -3 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 4\right] + 3\left[-3(1-\lambda) - 4\right] - 2\left[6 + 2(2-\lambda)\right] &= 0 \\ -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda - 45 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Poiché $\sigma_A \subset \mathbb{Z}$, gli autovalori sono numeri relativi, in particolare il prodotto dei tre è pari al determinate dell'operatore che vale $\det(\hat{A}) = -45$, ovvero è il termine noto dell'equazione secolare. I fattori primi sono: 5 e 3, quindi, a meno del segno, sono soluzioni. Proviamo $\lambda = 3$, si ha

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda - 45 = -27 + 45 + 27 - 45 = 0 \,,$$

è una soluzione. Ne consegue:

$$
\begin{aligned}
(\lambda-3)(-\lambda^2+a\lambda+15) &= -\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda-45 \\
-\lambda^3+(3+a)\lambda^2+(15-3a)\lambda-45 &= -\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda-45\,,
\end{aligned}
$$

da cui $a=2$ e i rimanenti due autovalori sono soluzioni dell'equazione

$$
\lambda^2-2\lambda-15=0
$$

$\lambda_-=-3$ e $\lambda_+=5$. Disponendo i tre autovalori in ordine crescente li indichiamo come

$$
\lambda_1=-3\,,\qquad \lambda_2=3\,,\qquad \lambda_3=5\,.
$$

Gli autovettori si ottengono come soluzioni dei sistemi

$$
\begin{pmatrix} 2-\lambda_k & -3 & -2 \\ -3 & 2-\lambda_k & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ u_k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\qquad k=1,2,3\,,
$$

dove u_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $k,j=1,2,3$. Otteniamo i valori delle secondo e terze componenti in funzione della prima, che, senza perdita di generalità, assumiamo essere non nulla e uguale a $u\neq 0$, comune per i tre autovettori. Consideriamo le due equazioni che si ottengono dalle prime due righe della precedente identità matriciale e le sottraiamo membro a membro

$$
\begin{matrix} (2-\lambda_k)u-3u_k^2-2u_k^3=0 \\ -3u+(2-\lambda_k)u_k^2-2u_k^3=0 \end{matrix}\qquad\Rightarrow\qquad (5-\lambda_k)u-(5-\lambda_k)u_k^2=0\,,
$$

quest'ultima può essere utilizzata solo per gli autovalori diversi da 5, ovvero per $\lambda_1=-3$ e $\lambda_2=3$, quindi

$$
u_{1,2}^2=u\,,\qquad u_{1,2}^3=-\frac{1+\lambda_{1,2}}{2}u\,.
$$

Le rappresentazioni dei primi due autovettori, relativi agli autovalori $\lambda_1=-3$ e $\lambda_2=3$, sono

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{u\sqrt{2+(1+\lambda_1)^2/4}}\begin{pmatrix} u \\ u \\ -(1+\lambda_1)u/2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \\
u_2 &= \frac{1}{u\sqrt{2+(1+\lambda_2)^2/4}}\begin{pmatrix} u \\ u \\ -(1+\lambda_2)u/2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}
$$

La rappresentazione del terzo autovettore, il cui autovalore è $\lambda_3=5$, si ottiene dalle equazioni relative alla prima e terza componente del sistema in forma matriciale, ovvero

$$
\begin{matrix} (2-\lambda_3)u-3u_k^2-2u_3^3=0 \\ -2u-2u_3^2+(1-\lambda_3)u_3^3=0 \end{matrix}\qquad\Rightarrow\qquad \begin{matrix} -3u-3u_3^2-2u_3^3=0 \\ -2u-2u_3^2-4u_3^3=0 \end{matrix}\qquad\Rightarrow\qquad \begin{matrix} u_3^2=-u \\ u_3^3=0 \end{matrix}\,,
$$

posto $u=1$ si ha

$$
u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.
$$

L'operatore $\hat{P}$ è il proiettore associato al primo autovettore, infatti, poiché l'operatore $\hat{A}$ è hermitiano e quindi, normale e diagonalizzabile, si ha la rappresentazione spettrale

$$
\hat{A}=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\hat{P}_k\,,
$$

dove i proiettori dell'insieme $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^3$, sono ortogonali e coprono tutto lo spazio, cioè verificano le condizioni

$$\hat{P}_k\hat{P}_j = \delta_{kj}\hat{P}_k\,, \qquad \forall\, k,j \in \{1,2,3\}\,, \qquad \sum_{k=1}^{3}\hat{P}_k = \hat{I}\,.$$

Nel caso di un operatore normale, i proiettori si ottengono dagli autovettori normalizzati, ovvero, indicando con $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$ il loro insieme, si ha

$$\{\hat{P}_k = |u_k\rangle\langle u_k|\}_{k=1}^3\,.$$

Ne consegue che l'operatore $\hat{P}$ coincide con il primo proiettore $\hat{P}_1 = |u_1\rangle\langle u_1|$. Infatti, $\forall\,|x\rangle \in H_3$, tale che $\langle u_1|x\rangle \neq 0$, si ha che il vettore $\hat{P}_1|x\rangle$ è un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ relativo all'autovalore λ_1,

$$\hat{P}_1|x\rangle = |u_1\rangle\langle u_1|x\rangle\,,$$

essendo proporzionale all'autovettore normalizzato. Poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, essendo soluzioni di equazioni omogenee, sia $|u_1\rangle$ che $\hat{P}_1|x\rangle$ sono parimenti autovettori relativi all'autovalore λ_1. Dal precedente argomento si deduce che $\hat{P} = \hat{P}_1 = |u_1\rangle\langle u_1|$. Gli elementi della matrice che rappresenta l'operatore $\hat{P}$ rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ sono

$$P^k_j = \langle e_k|\hat{P}|e_j\rangle = \langle e_k|u_1\rangle\langle u_1|e_j\rangle = u_1^k u_1^{j\,*} = u_1^k u_1^j\,, \qquad \forall\, k,j \in \{1,2,3\}\,,$$

u_1^k è la k-esima componente contro-variante del primo autovettore, mentre l'ultima identità segue dal fatto gli autovettori hanno componenti reali. Le componenti del primo autovettore sono tutte uguali a $1/\sqrt{3}$, ne consegue che la matrice P 3×3 che rappresenta l'operatore $\hat{P}$ è

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che

$$\mathscr{F}_k[f_n] = \frac{i^{n+1}}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-i(k+n)}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{ij(2+\pi)}\,\mathrm{Segno}[k-2j+n]$$

è la trasformata di Fourier della funzione

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{sen}^n(x)}{1-x}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile usare le formula di Leonhard Euler per la funzione seno.

Soluzione del sesto Problema

Usando il teorema della convoluzione, interpretiamo la funzione $f_n(x)$ come il prodotto della potenza n-esima della funzione seno e il polo semplice $1/(1-x)$, quindi si ha

$$\mathscr{F}_k[f_n] = \mathscr{F}_k\left[\mathrm{sen}^n(x)\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}^n(x)] * \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}[\mathrm{sen}^n(x)] * \mathscr{F}_{k'}\left[\frac{1}{1-x}\right]dk'\,.$$

La trasformata di Fourier della potenza n-sima delle funzione seno può essere calcolata usando la formula di Eulero e la rappresentazione integrale della distribuzione delta di Dirac, ovvero:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}^n(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}^n(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^n}{(2i)^n}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{(2i)^n\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix(k-2j+n)}dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{(2i)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\delta(k-2j+n)\,.
\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier del polo semplice si calcola usando la formula di Sokhotski-Plemelj, ricordando che, qualora ci fossero delle singolarità sull'asse reale, quindi lungo il percorso d'integrazione, l'integrale va considerato in valore principale, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1-x}dx &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-1+i\epsilon}dx + i\pi\, e^{-ikx}\Big|_{x=1}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2i\pi\theta(k)e^{-ik} + i\pi e^{-ik}\right)\\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ik}\underbrace{(2\theta(k)-1)}_{\mathrm{Segno}[k]} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Segno}[k]\,e^{-ik}\,.\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier cercata si ottiene dalla convoluzione delle due divisa per $\sqrt{2\pi}$, cioè

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f_n] &= \frac{i}{(2i)^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k'-2j+n)\,\mathrm{Segno}[k']e^{-ik'}dk'\\ &= \frac{i^{n+1}(-1)^n}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\mathrm{Segno}[k-2j+n]e^{-i(k-2j+n)}\\ &= \frac{i^{n+1}}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{ji\pi}\mathrm{Segno}[k-2j+n]e^{-i(k-2j+n)}\,,\end{aligned}$$

da cui, estraendo dalla somma i termini non dipendenti dall'indice j, si ottiene l'espressione richiesta

$$\mathscr{F}_k[f_n] = \frac{i^{n+1}}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-i(k+n)}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{ij(2+\pi)}\,\mathrm{Segno}[k-2j+n]\,.$$