Metodi Matematici per la Fisica

Secondo esonero - 11 giugno 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ operatori normali definiti nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni, tali che l'operatore $\hat{B}$ sia non-degenere, singolare e sia verificata l'identità

$$\hat{A}\hat{B}|x\rangle = |0\rangle\,,$$

$\forall |x\rangle \in E_N$. Si dimostri che i due operatori hanno lo stesso insieme di autovettori ortonormali e che lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ contiene l'autovalore nullo con ordine di degenerazione maggiore o uguale a $N-1$.

Soluzione del primo problema

Gli operatori sono normali e quindi hanno insiemi di autovettori ortonormali, indichiamo con $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{B}$ e con $\{\beta_k\}_{k=1}^N$ quello degli autovalori corrispondenti. Si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{B}|b_k\rangle = \beta_k|b_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\dots,N\}\,.$$

L'insieme degli autovettori $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ è inoltre una base ortonormale dello spazio di Hilbert E_N, rispetto alla quale la matrice che rappresenta lo stesso operatore è diagonale, mentre quello che rappresenta l'operatore $\hat{A}$, in generale non lo è, si hanno cioè

$$\hat{A} \overset{b}{\longleftrightarrow} A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_N \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^N_1 & A^N_2 & \cdots & A^N_N \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} \overset{b}{\longleftrightarrow} B_d = \mathrm{diag}\,(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_N)\,.$$

Poiché l'operatore che si ottiene dal prodotto $\hat{A}\hat{B}$ è l'operatore nullo, la matrice che lo rappresenta è la matrice nulla, ovvero la matrice con tutti gli elementi nulli. Consideriamo l'elemento (k,m) di tale matrice AB_d

$$0 = (AB_d)^k_m = A^k_j (B_d)^j_m = A^k_j \delta^j_m \beta_m = A^k_m \beta_m\,, \qquad \forall k,m \in \{1,2,\dots,N\}.$$

In particolare, $\forall\, \beta_m \neq 0$

$$A^k_m = 0\,, \qquad \forall k \in \{1,2,\dots,N\}$$

ovvero è nulla ogni colonna della matrice A il cui indice corrisponde a quello di un autovalore non nullo dell'operatore $\hat{B}$. Poiché l'operatore $\hat{B}$ è non degenere, l'autovalore nullo, qualora fosse presente, avrebbe ordine di degenerazione unitario. D'altro canto, se l'operatore $\hat{B}$ non avesse l'autovalore nullo sarebbe invertibile e quindi non singolare, avendo determinante non nullo, in contraddizione con una delle ipotesi del problema. Ne consegue che uno degli autovalori, tutti distinti, dello spettro discreto $\{\beta_k\}_{k=1}^N$ è nullo. Poniamo, senza perdita di generalità, $\beta_N = 0$, allora la matrice A, che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori di $\hat{B}$, ha solo l'N-esima colonna non nulla, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A^1_N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A^2_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A^N_N \end{pmatrix}.$$

Dalla condizione di "normalità" $\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = 0$, che vale analogamente per le matrici, si ottengono ulteriori informazioni a proposito degli elementi della matrice A. Infatti si ha che la matrice che rappresenta il commutatore è ovviamente nulla, cioè $\left[A, A^\dagger\right] = 0$, da cui si ha l'identità

$$AA^\dagger = A^\dagger A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A^1_N \\ 0 & \cdots & 0 & A^2_N \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A^N_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \left(A^1_N\right)^* & \left(A^2_N\right)^* & \cdots & \left(A^N_N\right)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \left(A^1_N\right)^* & \left(A^2_N\right)^* & \cdots & \left(A^N_N\right)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A^1_N \\ 0 & \cdots & 0 & A^2_N \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A^N_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left|A^1_N\right|^2 & A^1_N\left(A^2_N\right)^* & \cdots & A^1_N\left(A^N_N\right)^* \\ A^2_N\left(A^2_N\right)^* & \left|A^2_N\right|^2 & \cdots & A^2_N\left(A^N_N\right)^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^N_N\left(A^1_N\right)^* & A^N_N\left(A^2_N\right)^* & \cdots & \left|A^N_N\right|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \left|A^N_N\right|^2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(0, 0, \ldots, 0, \left|A^N_N\right|^2\right),$$

l'ultima matrice è diagonale ed ha solo l'ultimo elemento non nullo. Dall'identità precedente segue che

$$\left|A^k_N\right|^2 = 0, \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, N-1\},$$

ovvero che l'unico elemento dell'unica colonna non nulla della matrice A è l'ultimo, l'N-esimo e che quindi anche la matrice A è diagonale, ovvero si ha

$$A = \operatorname{diag}\left(0, 0, \ldots, A^N_N\right).$$

In definitiva, le rappresentazioni matriciali dei due operatori dati $\hat{A}$ e $\hat{B}$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori dell'operatore $\hat{B}$ sono diagonali e che, allora, gli stessi due operatori sono diagonalizzabili simultaneamente. Inoltre, dalla rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}$ si evince che lo spettro discreto ha, al più, due soli autovalori distinti lo zero con molteplicità $N-1$ e il numero A^N_N. Ovviamente, anche quest'ultimo potrebbe essere nullo, nel caso $\hat{A}$ sarebbe l'operatore nullo e lo zero il suo unico autovalore con molteplicità N. In generale, quindi, lo zero è un autovalore dell'operatore $\hat{A}$ con molteplicità $\geq N-1$. Le equazioni agli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ sono

$$\hat{A}|b_k\rangle = \alpha_k |b_k\rangle, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

con $\alpha_k = \delta^N_k A^N_N$.

Come è noto, la diagonalizzabilità simultanea è equivalente alla condizione di commutazione, cioè $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Quest'ultima si verifica direttamente osservando che il commutatore rappresenta l'operatore nullo. Dalle due equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|b_k\rangle = \alpha_k |b_k\rangle, \qquad \hat{B}|b_k\rangle = \beta_k |b_k\rangle, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

si ottiene che l'azione dell'operatore commutatore su un generico vettore della base ortonormale $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$,

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]|b_k\rangle = \hat{A}\hat{B}|b_k\rangle - \hat{B}\hat{A}|b_k\rangle = \beta_k \hat{A}|b_k\rangle - \alpha_k \hat{B}|b_k\rangle = \beta_k \alpha_k |b_k\rangle - \alpha_k \beta_k |b_k\rangle = |0\rangle, \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

dà il vettore nullo, che equivale ad affermare che il commutatore è nullo.

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si considerino i due operatori hermitiani $\hat{A}$ ed $\hat{R}$ definiti rispettivamente negli spazi di Hilbert E_N e E_2, N-dimensionale e bidimensionale, con $N \geq 3$, tali che le matrici A ed R, $N \times N$ e 2×2, che li rappresentano rispetto alle basi canoniche dei rispettivi spazi vettoriali sono

$$\hat{A} \hookleftarrow A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_N \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^N_1 & A^N_2 & \cdots & A^N_N \end{pmatrix}, \qquad \hat{R} \hookleftarrow R = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix},$$

ovvero la matrice R è la sotto-matrice $(1,2) \times (1,2)$ della matrice A.
Indicando con $\sigma_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ e $\sigma_R = \{\mu_1, \mu_2\}$ gli spettri discreti ordinati degli operatori $\hat{A}$ ed $\hat{R}$, con: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_N$ e $\mu_1 \leq \mu_2$, si dimostrino le diseguaglianze

$$\alpha_1 \leq \mu_1\,, \qquad \mu_2 \leq \alpha_N\,.$$

Suggerimento. Per determinare l'autovalore minore e quello maggiore potrebbe essere d'aiuto il valore di aspettazione dell'operatore, ad esempio $\hat{O}$, rispetto ad un vettore generico $|x\rangle$ normalizzato, cioè: $\langle \hat{O} \rangle_x = \langle x|\hat{O}|x\rangle / \langle x|x\rangle$.

Soluzione del secondo problema

Consideriamo il valore di aspettazione

$$\langle \hat{A} \rangle_x = \frac{\langle x|\hat{A}|x\rangle}{\langle x|x\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_j |x^j|^2}{\sum_{j=1}^N |x^j|^2}\,,$$

con la rappresentazione $|x\rangle = x^j |a_j\rangle$ del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori dell'operatore $\hat{A}$, dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori ordinati in modo crescente, in questo caso reali, essendo l'operatore hermitiano.
Si hanno

$$\alpha_1 = \min_{|x\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \langle \hat{A} \rangle_x \right\}\,, \qquad \alpha_N = \max_{|x\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \langle \hat{A} \rangle_x \right\}\,.$$

Rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ dello spazio di Hilbert E_N e in notazione a blocchi

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle_x &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N |x'^j|^2} \begin{pmatrix} x'^{1*} & x'^{2*} & \mathscr{X}'^\dagger_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \mathscr{A}_{13} \\ A^2_1 & A^2_2 & \mathscr{A}_{23} \\ \mathscr{A}_{31} & \mathscr{A}_{32} & \mathscr{A}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \mathscr{X}'_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^N |x'^j|^2} \begin{pmatrix} x'^{1*} & x'^{2*} & \mathscr{X}'^\dagger_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_1 x'^1 + A^1_2 x'^2 + \mathscr{A}_{13} \mathscr{X}'_3 \\ A^2_1 x'^1 + A^2_2 x'^2 + \mathscr{A}_{23} \mathscr{X}'_3 \\ \mathscr{A}_{31} x'^1 + \mathscr{A}_{32} x'^2 + \mathscr{A}_{33} \mathscr{X}'_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^N |x'^j|^2} \Big(A^1_1 |x'^1|^2 + A^2_1 x'^{2*} x'^1 + \mathscr{X}'^\dagger_3 \mathscr{A}_{31} x'^1 + A^1_2 x'^{1*} x'^2 + A^2_2 |x'^2|^2 + \mathscr{X}'^\dagger_3 \mathscr{A}_{32} x'^2 \\
&\quad + x'^{1*} \mathscr{A}_{13} \mathscr{X}'_3 + x'^{2*} \mathscr{A}_{23} \mathscr{X}'_3 + \mathscr{X}'^\dagger_3 \mathscr{A}_{33} \mathscr{X}'_3 \Big) \\
&= \frac{1}{\sum_{j=1}^N |x'^j|^2} \left(A^1_1 |x'^1|^2 + A^2_2 |x'^2|^2 + \mathscr{X}'^\dagger_3 \mathscr{A}_{33} \mathscr{X}'_3 + 2\,\mathrm{Re}\left(A^1_2 x'^{1*} x'^2 \right) + 2\,\mathrm{Re}\left(x'^{1*} \mathscr{A}_{13} \mathscr{X}'_3 \right) + 2\,\mathrm{Re}\left(x'^{2*} \mathscr{A}_{23} \mathscr{X}'_3 \right) \right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato le rappresentazioni $|x\rangle = x'^k |e_k\rangle$ e $A^k_j = \langle e_k|\hat{A}|e_j\rangle$, con $k, j = 1, 2, \ldots, N$ e indicato con $\mathscr{A}_{13}$, $\mathscr{A}_{23}$, $\mathscr{A}_{33}$ e $\mathscr{X}_3$ le sotto-matrici di A nelle posizioni: $(1,1) \times (1,2)$, $(2,2) \times (1,2)$, $(3,n) \times (3,N)$ e il sotto-vettore $(N-2) \times 1$, che ha per elementi le ultime $N-2$ componenti contro-varianti del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base canonica, ovvero $\mathscr{X}^T_3 = \left(x'^3 \; x'^4 \cdots x'^N \right)$. La condizione di hermitianità dà le relazioni

$$A^k_j = (A^k_j)^*\,, \forall\, k, j \in \{1, 2, \ldots, N\} \;\; \Rightarrow \;\; \mathscr{A}_{23} = \mathscr{A}^\dagger_{32}\,, \qquad \mathscr{A}_{13} = \mathscr{A}^\dagger_{31}\,, \qquad \mathscr{A}_{33} = \mathscr{A}^\dagger_{33}\,,$$

da cui si ottiene il risultato finale in termini della parti reali.
Per l'operatore $\hat{R}$ si ha

$$\begin{aligned}\langle\hat{R}\rangle_x &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{2}|x''^j|^2}\begin{pmatrix} x''^{1*} & x''^{2*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{2}|x''^j|^2}\left(A_1^1|x''^1|^2 + A_2^2|x''^2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(A_2^1 x''^{1*}x''^2\right)\right),\end{aligned}$$

dove si è considerata la rappresentazione $|x\rangle = x''^j|u_j\rangle$ rispetto alla base canonica $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^2 \subset E_2$ dello spazio di Hilbert E_2.
Ne consegue che, indicando con $|x_m\rangle = x_m^j|u_j\rangle \in E_2$ e $|x_M\rangle = x_M^j|u_j\rangle \in E_2$ i vettori in corrispondenza dei quali si hanno rispettivamente i valori minimo e massimo di $\langle\hat{R}\rangle_x$, per cui

$$\mu_1 = \min_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\langle\hat{R}\rangle_x\right\} = \langle\hat{R}\rangle_{x_m}\,, \qquad \mu_2 = \max_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\langle\hat{R}\rangle_x\right\} = \langle\hat{R}\rangle_{x_M}\,,$$

è immediato osservare che i valori di aspettazione $\langle\hat{A}\rangle_x$ in corrispondenza dei vettori $|x_L\rangle = x_m^1|e_1\rangle + x_m^2|e_2\rangle \in E_N$ e $|x_H\rangle = x_M^1|e_1\rangle + x_M^2|e_2\rangle \in E_N$, che implica: $\mathscr{X}_3^T = (0\;0\cdots 0)$ in ambedue i casi, sono

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle_{x_L} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{2}|x_m^j|^2}\left(A_1^1|x_m^1|^2 + A_2^2|x_m^2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(A_2^1 x_m^{1*}x_m^2\right)\right) = \mu_1\,, \\ \langle\hat{A}\rangle_{x_H} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{2}|x_M^j|^2}\left(A_1^1|x_M^1|^2 + A_2^2|x_M^2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(A_2^1 x_M^{1*}x_M^2\right)\right) = \mu_2\,.\end{aligned}$$

Infine, il minimo e il massimo, al variare del vettore $|x\rangle \in E_N\backslash\{|0\rangle\}$, di questo valore di aspettazione, che rappresentano rispettivamente il minore e il maggiore degli autovalori dello spettro σ_A, verificano le relazioni cercate, infatti

$$\alpha_1 = \min_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\langle\hat{A}\rangle_x\right\} \le \langle\hat{A}\rangle_{x_L} = \mu_1\,, \qquad \alpha_N = \max_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\langle\hat{A}\rangle_x\right\} \ge \langle\hat{A}\rangle_{x_H} = \mu_2\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathscr{F}_{x'}[f]\,e^{-ixx'}dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x'-x)\mathscr{F}_{x'}[f]\,dx'\,,$$

$\forall\, f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione a primo membro è la trasformata di Fourier del prodotto della funzione $f(x)$ e della sua trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_x[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iyx}dy\,.$$

Applicando il teorema della convoluzione, possiamo ottenere la trasformata di Fourier di un prodotto come convoluzione della trasformate di Fourier, ovvero, $\forall\, g(x), h(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{F}_k[gh] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_{k'}[g] * \mathscr{F}_{k'}[h](k)\,.$$

Nel caso in esame, la funzione che rappresenta il membro di sinistra è

$$[\text{primo membro}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathscr{F}_{x'}[f]\,e^{-ixx'}dx' = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_x\left[f(x')\mathscr{F}_{x'}[f]\right] = \mathscr{F}_{x'}[f] * \mathscr{F}_{x'}[\mathscr{F}_{x''}[f]](x)\,,$$

dove, per la seconda funzione della convoluzione si ha

$$\mathscr{F}_{x'}\left[\mathscr{F}_{x''}[f]\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-ix''y} e^{-ix''x'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-ix''(y+x')}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y+x')dy = f(-x'),$$

sostituendo nell'espressione del primo membro, si ottiene

$$[\text{primo membro}](x) = \left(\mathscr{F}_{x'}[f] * f(-x')\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(-(x-x')\right)\mathscr{F}_{x'}[f]\,dx'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x'-x)\mathscr{F}_{x'}[f]\,dx',$$

che corrisponde al secondo membro dell'identità richiesta e quindi la verifica.

Quarto problema (punteggio 3/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}.$$

Soluzione del quarto problema

Possiamo usare il teorema della convoluzione scrivendo la funzione $f(x)$ come prodotto delle funzioni $\cos(x)$ e $1/\cosh(x)$, si ha

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_{k'}[\cos(x)] * \mathscr{F}_{k'}\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right]\right)(k).$$

La trasformata di Fourier della funzione coseno è una combinazione di delta di Dirac, infatti si ha

$$\mathscr{F}_k[\cos(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)}+e^{-ix(k+1)}\right)dx,$$

da cui, usando la rappresentazione integrale della delta di Dirac,

$$\mathscr{F}_k[\cos(x)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k-1)+\delta(k+1)\right).$$

La trasformata di Fourier dell'inversa della funzione coseno iperbolico è

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{e^x+e^{-x}}dx.$$

Nel piano complesso z consideriamo il percorso rettangolare chiuso

$$\Gamma_R = [-R,R]\cup[R,R+i\pi]\cup[R+i\pi,-R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R],$$

dove con il simbolo $[z_1,z_2]$ si indica il segmento della retta passante per i punti z_1 e z_2 con questi punti come estremi e orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. L'integrale dell'integranda della trasformata di Fourier della funzione $1/\cosh(x)$ su questo percorso chiuso può essere calcolato con il teorema dei residui, si ha

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{e^z+e^{-z}}dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{e^z+e^{-z}}, z=\frac{i\pi}{2}\right) = \pi e^{k\pi/2}.$$

Poiché il risultato è indipendente da R, è possibile passare al limite $R\to\infty$,

$$\pi e^{k\pi/2} = \lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{e^z+e^{-z}}dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{e^x+e^{-x}}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik(x+i\pi)}}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$+\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-ik(R+iy)}}{e^{R+iy}+e^{-(R+iy)}}dy}_{=0} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-ik(-R+iy)}}{e^{-R+iy}+e^{-(-R+iy)}}dy}_{=0}$$
$$= \left(1+e^{k\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{e^x+e^{-x}}dx,,$$

da cui si ottiene il valore dell'integrale cercato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi e^{k\pi/2}}{1 + e^{k\pi}} = \frac{\pi}{e^{-k\pi/2} + e^{k\pi/2}} = \frac{\pi}{2\cosh(k\pi/2)} .$$

Alla luce di questi risultati, la trasformata di Fourier dell'inversa della funzione coseno iperbolico vale

$$\mathscr{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{e^x + e^{-x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh(k\pi/2)} .$$

Otteniamo il risultato finale facendo la convoluzione delle trasformate di Fourier

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \big(\delta(k'-1) + \delta(k'+1)\big) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh((k-k')\pi/2)} dk' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\cosh((k+1)\pi/2)} + \frac{1}{\cosh((k-1)\pi/2)} \right) . \end{aligned}$$

Quinto problema (punteggio 3/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x\theta(x)\theta(a-x) ,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino di Heaviside e con $a \in (0, \infty)$.

Soluzione del quinto problema

La funzione a gradino di Heaviside è definita dalla duplice legge

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} ,$$

ne consegue che la trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_k[x\theta(x)\theta(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\theta(x)\theta(a-x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a x e^{-ikx} dx ,$$

integrando per parti

$$\mathscr{F}_k[x\theta(x)\theta(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_0^a + \frac{1}{ik} \int_0^a e^{-ikx} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{iae^{-ika}}{k} + \frac{e^{-ika} - 1}{k^2} \right) ,$$

in definitiva

$$\mathscr{F}_k[x\theta(x)\theta(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika}(1 + ika) - 1}{k^2} .$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

L'operatore $\hat{S}$, è definito nello spazio di Hilbert tridimensionale E_3 dalle azioni

$$\hat{S}|e_j\rangle = \sum_{m,k=1}^{3} \epsilon_{mjk} |e_k\rangle , \qquad j = 1, 2, 3 ,$$

dove l'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert E_3 e ϵ_{mjk}, con $m, j, k \in \{1, 2, 3\}$, è il simbolo anti-simmetrico di Levi-Civita.
Si determinino: lo spettro discreto dell'operatore $\hat{S}$ e, la matrice e i vettori colonna che rappresentano lo stesso operatore e i suoi autovettori rispetto alla base data.
Infine, si classifichino gli operatori $\hat{S}$ e $\hat{T} = e^{\hat{S}}$, fornendo le opportune argomentazioni.

Soluzione del sesto Problema

La base è ortonormale per cui gli elementi della matrice S che rappresenta l'operatore $\hat{S}$ sono

$$S^l_j = \langle e_l|\hat{S}|e_j\rangle = \sum_{m,k=1}^{3} \epsilon_{mjk}\langle e_l|e_k\rangle = \sum_{m,k=1}^{3} \epsilon_{mjk}\delta^l_k = \sum_{m=1}^{3}\epsilon_{mjl}\,, \qquad \forall\, l,j\in\{1,2,3\}\,,$$

da cui

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha elementi reali ed è antisimmetrica ne consegue che l'operatore $\hat{S}$ è anti-hermitiano, cioè: $\hat{S}^\dagger = -\hat{S}$, infatti la relazione matriciale è $S^\dagger = S^{T*} = \{\text{è reale}\} = S^T = \{\text{è anti-simmetrica}\} = -S$. Risolviamo l'equazione secolare per determinare lo spettro discreto

$$\begin{aligned} \det(S-\sigma I) &= 0 \\ \begin{pmatrix} -\sigma & -1 & 1 \\ 1 & -\sigma & -1 \\ -1 & 1 & -\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\ -\sigma\left(\sigma^2+1\right)-(\sigma-1)-(1+\sigma) &= 0 \\ -\sigma\left(\sigma^2+3\right) &= 0\,. \end{aligned}$$

La soluzioni, ovvero gli autovalori sono

$$\sigma_{1,2} = \pm i\sqrt{3}\,, \qquad \sigma_3 = 0\,.$$

Le rappresentazioni degli autovettori, che, essendo l'operatore $\hat{A}$ normale (in quanto anti-hermitiano), costituiscono una base ortonormale dello spazio di Hilbert E_3, si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -\sigma_j & 1 & -1 \\ -1 & -\sigma_j & 1 \\ 1 & -1 & -\sigma_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1_{(j)} \\ v^2_{(j)} \\ v^3_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j=1,2,3\,.$$

Assumiamo che la prima componente contro-variante dei tre vettori sia non nulla ed esprimiamo in termini di essa le altre due. Dalla somma delle equazioni corrispondenti alle prime due identità dedotte dalla precedente relazione, si ha

$$(-\sigma_j-1)v^1_{(j)}+(1-\sigma_j)v^2_{(j)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v^2_{(j)} = \frac{1+\sigma_j}{1-\sigma_j}v^1_{(j)}\,,$$

le terze componenti si ottengono dalla seconda equazione

$$v^3_{(j)} = v^1_{(j)}+\sigma_j v^2_{(j)} = \left(1+\frac{\sigma_j+\sigma_j^2}{1-\sigma_j}\right)v^1_{(j)} = \frac{1+\sigma_j^2}{1-\sigma_j}v^1_{(j)}\,.$$

Considerando i valori espliciti degli autovalori si hanno le seconde componenti contro-varianti

$$v^2_{(1,2)} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{1\mp i\sqrt{3}}v^1_{(j)} = \frac{\left(1\pm i\sqrt{3}\right)^2}{4}v^1_{(j)} = e^{\pm 2i\pi/3}v^1_{(j)}\,, \qquad v^2_{(3)} = v^2_{(1)}\,,$$

le terze sono

$$v^3_{(1,2)} = \frac{1-3}{1\mp i\sqrt{3}}v^1_{(1)} = -e^{\pm i\pi/3}v^1_{(1)}\,, \qquad v^3_{(3)} = v^1_{(1)}\,.$$

In definitiva

$$v_1 = v^1_{(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = v^1_{(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = v^1_{(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove, al fine di normalizzare, si è posto $v^1_{(1)} = 1/\sqrt{3}$.
Come detto l'operatore $\hat{S}$ è anti-hermitiano, cioè $\hat{S}^\dagger = -\hat{S}$, quindi normale e diagonalizzabile. L'operatore $\hat{T} = e^{\hat{S}}$ è di conseguenza unitario, infatti

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger = e^{\hat{S}}\left(e^{\hat{S}}\right)^\dagger = e^{\hat{S}}e^{\hat{S}^\dagger} = e^{\hat{S}}e^{-\hat{S}} = \hat{I}\,, \qquad \hat{T}^\dagger\hat{T} = \left(e^{\hat{S}}\right)^\dagger e^{\hat{S}} = e^{\hat{S}^\dagger}e^{\hat{S}} = e^{-\hat{S}}e^{\hat{S}} = \hat{I}\,.$$