

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA - 10 GENNAIO 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

## PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO: 7/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+3} dx.$$

**Suggerimento:** Si faccia attenzione al residuo all'infinito.

### SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è polidroma, i punti di diramazione al finito sono gli zeri dell'argomento della radice quadrata, ovvero  $d_{1,2} = \mp 1$ . Si può applicare il solito procedimento del percorso ad osso, anche se in questo caso dovremmo considerare, non solo i residui al finito, dati dagli zeri del polinomio a denominatore, cioè  $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ , bensì anche il residuo all'infinito che si vede facilmente essere diverso da zero. Infatti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f(z), z = \infty] &= -\operatorname{Res} [f(1/w)/w^2, w = 0] = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)}}{1/w^2+3} \frac{dw}{w^2} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{3w^2+1} \frac{dw}{w} \\ &= -\left. \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{3w^2+1} \right|_{w=0} \\ &= -\left. \sqrt{(w+1)(w-1)} \right|_{w=0} \neq 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo lasciato da valutare la radice nell'origine,  $w = 0$ , in quanto tale valore dipende dalla scelta delle fasi, in ogni caso non nullo, ha modulo uno. Per evitare problemi, che tratteremo comunque dopo, facciamo il cambiamento di variabile  $w = 1/x$ , ovvero  $x = 1/w$  e  $dx = -dw/w^2$ . Poiché l'origine è contenuta nell'intervallo di integrazione, prima di fare il cambiamento di variabile necessario spezzare l'intervallo come segue

$$J = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x^2+3} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x^2+3} dx,$$

a questo punto si ottengono gli integrali in  $dw$

$$\begin{aligned} J &= -\int_{-1}^{-\infty} \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)}}{1/w^2+3} \frac{dw}{w^2} - \int_{\infty}^1 \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)}}{1/w^2+3} \frac{dw}{w^2} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)}}{1/w^2+3} \frac{dw}{w^2} + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)}}{1/w^2+3} \frac{dw}{w^2} \\ &= -\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{3w^2+1} \frac{dw}{w} + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{3w^2+1} \frac{dw}{w}. \end{aligned}$$

importante notare che il segno meno di fronte al primo integrale dell'ultima riga è conseguenza dell'estrazione del fattore  $1/w^2$  dalla radice quadrata. Infatti in generale si ha

$$\sqrt{w^2} = \pm w.$$

Avendo la possibilità di scegliere la determinazione possiamo stabilire anche il segno della radice. Con la scelta di determinazione principale  $\arg(w) \in [0, 2\pi)$ ,  $w = |w|e^{i\arg(w)}$ , sul semiasse reale positivo, quindi nel secondo integrale,  $\arg(w) = 0$ , ovvero

$$\sqrt{w^2} = \sqrt{|w|^2 e^{2i\arg(w)}} = |w| = +w.$$

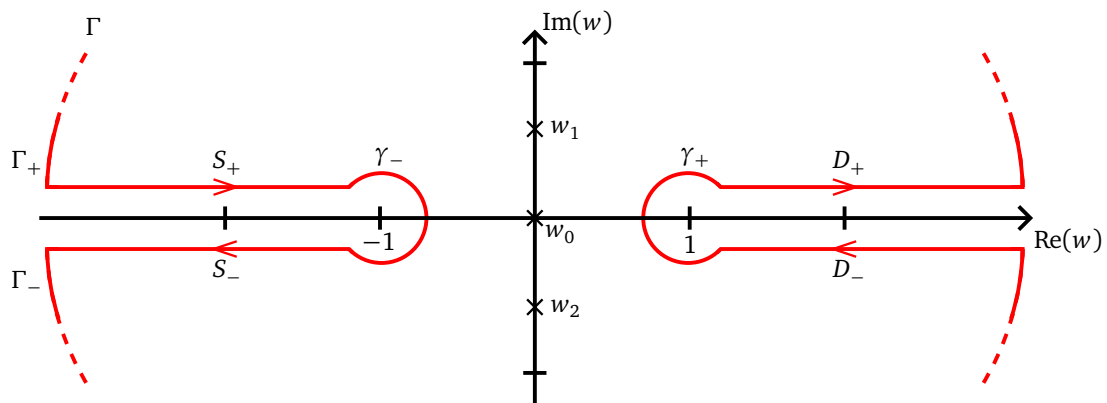
Sul semiasse reale negativo, invece,  $\arg(w) = \pi$ , e la radice di  $w^2$  negativa, infatti

$$\sqrt{w^2} = \sqrt{|w|^2 e^{2i\arg(w)}} = \sqrt{|w|^2 e^{2i\pi}} = |w|e^{i\pi} = -w.$$

Come nel caso degli integrali su cammini ad osso, definiamo le fasi delle funzioni sotto radice in modo che le discontinuità, i tagli, coincidano con il percorso di integrazione. Perciò le scelte sono

$$\begin{aligned} w + 1 &= |w + 1|e^{i\theta_1}, & \theta_1 &\in (-\pi, \pi), \\ w - 1 &= |w - 1|e^{i\theta_2}, & \theta_2 &\in (0, 2\pi), \end{aligned}$$

il taglio che si origina in  $w = 1$  in avanti, mentre quello da  $w = -1$  all'indietro. In ambedue le funzioni la variabile compare con il segno pi, quindi le fasi delle funzioni si comportano come quelle della stessa variabile  $w$ . Definiamo il percorso  $\Gamma$  che, come mostrato in figura, avvolge i tagli ed è chiuso all'infinito.



Tale percorso è composto dall'unione di quattro tratti rettilinei, due sopra,  $S_+$  e  $D_+$ , e due sotto,  $S_-$  e  $D_-$ , i tagli; e quattro archi, due infiniti nei semipiani  $\text{Im}(w) > 0$  e  $\text{Im}(w) < 0$ ,  $\Gamma_{\pm}$ , di centro nell'origine e raggio  $R$ ; e due infinitesimi,  $\gamma_{\pm}$ , di raggio  $\epsilon$  e centri nei punti di diramazione  $d'_{1,2} = -\pm 1$ . Nei limiti  $R \rightarrow \infty$  ed  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'integrale su  $\Gamma$  tende alla somma dei residui, che si hanno in corrispondenza delle singolarità, tutti poli semplici,

$$w_0 = 0, \quad w_{1,2} = \frac{\pm i}{\sqrt{3}}.$$

Il residuo all'infinito è nullo in quanto è nullo il residuo nell'origine dell'integranda originale. In definitiva

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} dw}{3w^2 + 1} = 2i\pi (\text{Res}[f(w), w = w_1] + \text{Res}[f(w), w = w_2] + \text{Res}[f(w), w = w_0]),$$

dove si è posto

$$f(w) = \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2 + 1)}.$$

Gli integrali sugli archi, negli stessi limiti, sono nulli. In particolare, per gli integrali sugli archi infinitesimi verifichiamo che, su  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  rispettivamente, si abbiamo i limiti

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(w)(w-1) \stackrel{\text{unif.}}{=} 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(w)(w+1) \stackrel{\text{unif.}}{=} 0.$$

Con  $w = \pm 1 + \epsilon e^{i\theta}$ , si ottengono le limitazioni cercate

$$|f(w)(w \mp 1)| = \left| \frac{\sqrt{(w \pm 1)}\sqrt{(w \mp 1)}^3}{w(3w^2 + 1)} \right| \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\epsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Allo stesso modo, l'annullamento dei contributi degli archi infiniti conseguenza dei valori limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(w)w \stackrel{\text{unif.}}{=} 0,$$

sia su  $\Gamma_+$  che su  $\Gamma_-$ . Si verifica facilmente che, posto  $w = Re^{i\theta}$ ,

$$|f(w)w| = \left| \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{3w^2+1} \right| \underset{R \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{3R} \underset{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0,$$

indipendentemente da  $\theta$ .

Consideriamo i contributi sui tratti rettilinei  $S_{\pm}$  e  $D_{\pm}$ , in particolare i valori delle fasi sono

$$\begin{cases} S_+ : & \theta_1 = \pi, & \theta_2 = \pi, \\ S_- : & \theta_1 = -\pi, & \theta_2 = \pi, \\ D_+ : & \theta_1 = 0, & \theta_2 = 0, \\ D_- : & \theta_1 = 0, & \theta_2 = 2\pi. \end{cases}$$

Gli integrali su  $S_{\pm}$ , indicando con  $\theta_{1,2}^{\pm}$  le fasi sul primo e secondo tratto rispettivamente, sono

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_+ \cup S_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_+} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(\theta_1^+ + \theta_2^+)/2}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{-1}^{-\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(\theta_1^- + \theta_2^-)/2}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(\pi + \pi)/2}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{-1}^{-\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(-\pi + \pi)/2}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{-1}^{-\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= -2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw. \end{aligned}$$

Sui tratti  $D_{\pm}$ , indicando sempre con  $\theta_{1,2}^{\pm}$  le fasi sul primo e secondo rispettivamente, si hanno gli integrali

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_+ \cup D_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_+} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(\theta_1^+ + \theta_2^+)/2}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{\infty}^1 \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(\theta_1^- + \theta_2^-)/2}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(0+0)/2}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{\infty}^1 \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)} e^{i(0+2\pi)/2}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw - \int_{\infty}^1 \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \\ &= 2 \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw. \end{aligned}$$

Mettendo insieme questi due risultati e i contributi sugli archi si ottiene che, nei limiti  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'integrale su  $\Gamma$  tende al doppio dell'integrale cercato

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{S_+ \cup S_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw + \int_{D_+ \cup D_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \right) \\ &\quad + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw}_{=0} + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw}_{=0} \\ &= -2 \int_{-\infty}^{-1/2} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw + 2 \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{(w+1)(w-1)}}{w(3w^2+1)} dw &= 2J. \end{aligned}$$

In termini dei residui

$$J = i\pi (\text{Res}[f(w), w = w_1] + \text{Res}[f(w), w = w_2] + \text{Res}[f(w), w = w_0]).$$

I residui nei poli  $w_{1,2} = \pm i/\sqrt{3}$  sono

$$\text{Res}[f(w), w = w_{1,2}] = \pm \frac{\sqrt{(w_{1,2}+1)(w_{1,2}-1)}}{3w_{1,2}(w_1-w_2)} = -\frac{1}{2} \sqrt{(w_{1,2}+1)(w_{1,2}-1)},$$

dove si sono usate le identit :  $1/w_{1,2} = \mp i\sqrt{3}$  e  $w_1 - w_2 = 2i/\sqrt{3}$ . I valori della radice sono

$$\sqrt{(w_{1,2}+1)(w_{1,2}-1)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} \pm i)(-\sqrt{3} \pm i)}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i(\alpha_{1,2} + \beta_{1,2})/2},$$

dove le fasi  $\alpha_{1,2}$  sono definite nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , in particolare nel primo e quarto quadrante, quindi

$$\alpha_1 = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha_2 = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}.$$

Le fasi  $\beta_1$  e  $\beta_2$  devono invece essere definite in  $(0, 2\pi)$  e appartengono al secondo e terzo quadrante,

$$\beta_1 = \arctan[1/(-\sqrt{3})] = \frac{5\pi}{6}, \quad \beta_2 = \arctan[-1/(-\sqrt{3})] = \frac{7\pi}{6}.$$

Le espressioni complete dei due residui sono

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(w), w = w_1] &= -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(\pi/6 + 5\pi/6)/2} = -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \text{Res}[f(w), w = w_2] &= -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(-\pi/6 + 7\pi/6)/2} = -\frac{i}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

sono uguali, quindi la somma

$$\text{Res}[f(w), w = w_1] + \text{Res}[f(w), w = w_2] = -\frac{2i}{\sqrt{3}}.$$

Il residuo nell'origine, avendo che le fasi nell'origine sono  $\theta_1^0 = 0$  e  $\theta_2^0 = \pi$ ,

$$\text{Res}[f(w), w = w_0 = 0] = \frac{\sqrt{(w_0+1)(w_0-1)}}{3w_0^2+1} = e^{i(0+\pi)/2} = i.$$

Finalmente si ha l'integrale cercato

$$\begin{aligned} J &= i\pi (\text{Res}[f(w), w = w_1] + \text{Res}[f(w), w = w_2] + \text{Res}[f(w), w = w_0]) = i\pi \left( -\frac{2i}{\sqrt{3}} + i \right) \\ J &= \pi \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right). \end{aligned}$$

UN'ALTRA VIA

Senza fare la sostituzione si procede come segue. Osserviamo che l'integranda ha due poli semplici in

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}.$$

Possiamo riscrivere l'integrale come

$$J = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(1+z)(1-z)}}{(z-z_1)(z-z_2)} dz.$$

Consideriamo il vero e proprio percorso ad "osso",  $\Gamma$ , mostrato nella figura successiva, che aggira il percorso di integrazione  $[-1, 1]$ . Tale percorso è l'unione di due tratti rettilinei  $L_{\pm}$  e due archi  $\gamma_{\pm}$ , di raggio  $\epsilon$  e centri nei punti di diramazione,  $p_{1,2} = \mp 1$ .

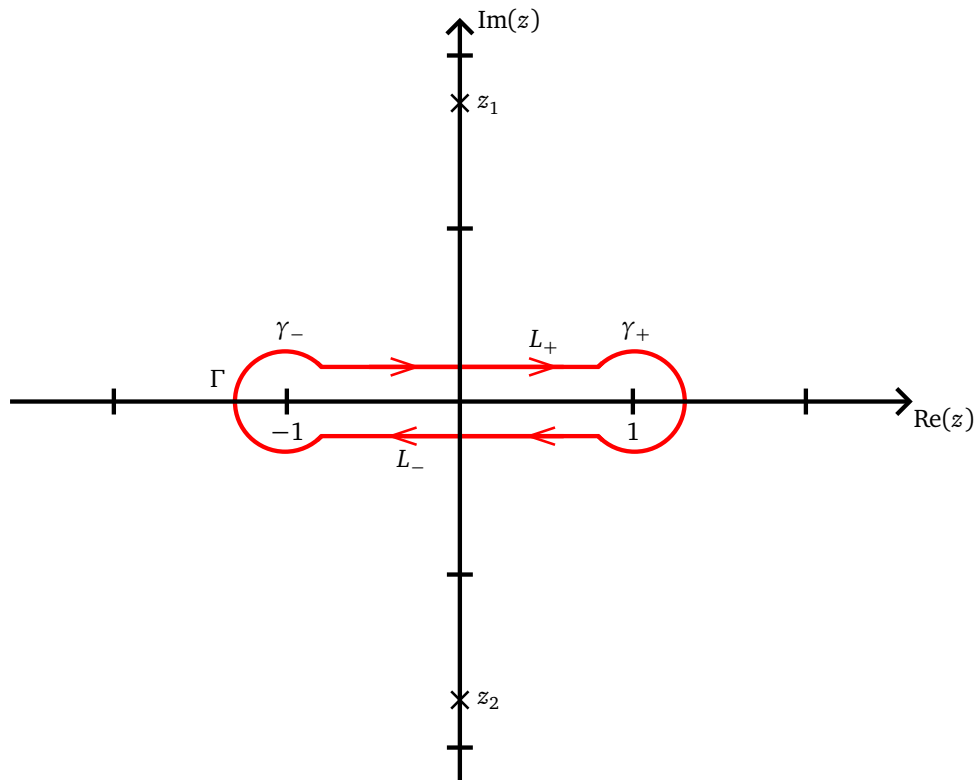
Scegliamo le fasi delle funzioni  $(1+z)$  e  $(1-z)$ , che rappresentano l'argomento della radice, in modo tale che la discontinuità e quindi il taglio, coincida con il segmento  $[-1, 1]$ . A tal fine definiamo entrambi i tagli in avanti, con

$$\begin{aligned} 1+z &= |1+z|e^{i\theta_1}, & \theta_1 &\in (0, 2\pi), \\ 1-z &= |1-z|e^{i\theta_2}, & \theta_2 &\in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

Queste scelte seguono la solita logica: per la funzione  $(1+z)$  la fase si comporta come quella della variabile  $z$ , che compare con il segno pi, quindi si ha il taglio in avanti con  $\theta_1 \in (0, 2\pi)$ . Nel caso della funzione  $(1-z)$ , i comportamenti delle fasi  $\theta_2$  e  $\arg(z)$  sono opposti, infatti  $z$  compare con il segno meno, quindi, il taglio in avanti si ha per  $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$ . Ovviamente, poiché i punti di diramazione hanno entrambi ordine uno, nella regione di sovrapposizione i due tagli si cancellano, rimane solo la discontinuità in  $(-1, 1)$ , che è quella dovuta alla funzione  $(1+z)$ .

L'integrale sul percorso chiuso  $\Gamma$ , anche nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , coincide con la somma dei residui

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\sqrt{(1+z)(1-z)}}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty]).$$



Tale integrale pu anche essere scritto come some dei quattro contributi, sui tratti rettilinei e sugli archi. In particolare si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_+} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_-} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_-} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_+} f(z) dz.$$

Il primo contributo coincide con l'integrale cercato, infatti, sopra il taglio le fasi sono entrambe nulle  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . La prima nulla poich ci troviamo sopra il taglio che ha origine in  $z = -1$ , la seconda nulla poich siamo nella regione di monodromia della funzione  $\sqrt{1-z}$ . Ovvero, passando attraverso l'asse reale,  $\theta_2$  oscilla intorno allo zero, mentre la fase  $\theta_1$  ad essere discontinua, saltando da valori maggiori di zero a valori minori di  $2\pi$ . L'integrale su  $L_+$  vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_+} f(z) dz = \int_{-1}^1 f(x) e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = J.$$

Sotto il taglio, su  $L_-$ , la fase  $\theta_2 = 0$ , per lo stesso argomento di prima, mentre  $\theta_1 = 2\pi$ , quindi, tenendo conto del verso di percorrenza da destra a sinistra, avremo ancora l'integrale di partenza

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_-} f(z) dz = \int_1^{-1} f(x) e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} dx = \int_1^{-1} f(x) e^{i\pi} dx = - \int_1^{-1} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = J.$$

I contributi sugli archi sono nulli nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\pm}} f(z) dz = 0$$

questo risultato si ha come conseguenza dei limiti uniformi

$$\begin{aligned} z \in \gamma_-, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(z)(z+1) &\stackrel{\text{unif.}}{=} 0, \\ z \in \gamma_+, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(z)(z-1) &\stackrel{\text{unif.}}{=} 0. \end{aligned}$$

In particolare, su  $\gamma_{\mp}$ , si ha  $z = \mp 1 + \epsilon e^{i\alpha}$ , quindi

$$|f(z)(z \pm 1)| = \left| \frac{\sqrt{(1 \mp z)} \sqrt{(1 \pm z)}^3}{(z - z_1)(z - z_2)} \right| \epsilon \simeq \frac{\sqrt{2}}{|(\mp 1 - z_1)(\mp 1 - z_2)|} \epsilon^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{|(\mp 1 - i\sqrt{3})(\mp 1 + i\sqrt{3})|} \epsilon^{3/2} = \frac{\epsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

In definitiva

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_+} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_-} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_-} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_+} f(z) dz = 2J,$$

In termini dei residui

$$J = i\pi (\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty]).$$

Calcoliamo i residui in  $z = z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ ,

$$\text{Res}[f(z), z_{1,2}] = \lim_{z \rightarrow z_{1,2}} f(z)(z - z_{1,2}) = \pm \frac{\sqrt{(1 + z_{1,2})(1 - z_{1,2})}}{z_1 - z_2}.$$

Per valutare la radice in  $z = z_{1,2}$  dobbiamo tener conto della scelta delle fasi dei singoli fattori

$$\begin{aligned} (1 + z_{1,2}) &= 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{i\alpha_{1,2}} = 2e^{i\pi/3}, 2e^{5i\pi/3}, \\ (1 - z_{1,2}) &= 1 \mp i\sqrt{3} = 2e^{i\beta_{1,2}} = 2e^{\mp i\pi/3}. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\sqrt{(1+z_{1,2})(1-z_{1,2})} = \pm 2.$$

I residui al finito sono

$$\text{Res} [f(z), z_{1,2}] = \pm \frac{\sqrt{(1+z)(1-z)} \Big|_{z=z_{1,2}}}{z_1 - z_2} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

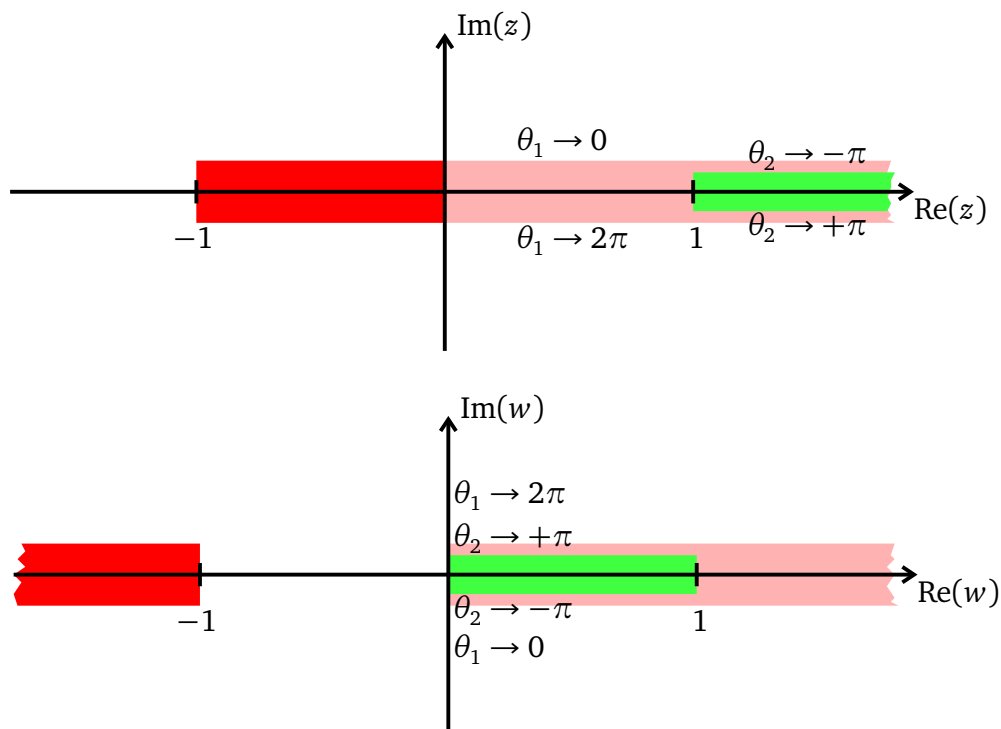
Il residuo all'infinito si ottiene con il cambiamento di variabile  $w = 1/z$

$$\text{Res} [f(z), z = \infty] = -\text{Res} [f(1/w)/w^2, w = 0] = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{(1+1/w)(1-1/w)} dw}{1/w^2 + 3} \frac{1}{w^2},$$

dove  $\gamma_0$  una circonferenza centrata nell'origine di raggio minore di uno. Usando le definizioni precedenti per la fasi si ha

$$\begin{aligned} \text{Res} [f(z), z = \infty] &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{|1+1/w||1-1/w|} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} dw}{1/w^2 + 3} \frac{1}{w^2} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{|w+1||w-1|} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} dw}{3w^2 + 1} \frac{1}{w} \\ &= -e^{i(\theta_1^0+\theta_2^0)/2}, \end{aligned}$$

dove  $\theta_1^0$  la fase di  $-1$ , mentre  $\theta_2^0$  quella di  $1$ .



I valori degli angoli  $\theta_1^0$  e  $\theta_2^0$  si ottengono studiando il comportamento dei tagli in seguito al cambiamento di variabile  $z \rightarrow w = 1/z$ . I tagli nel piano  $z$  sono mostrati nella figura in alto. In due tonalità di rosso quello che si origina da  $z = -1$ , in verde quello originato da  $z = 1$ . Sono anche indicati i valori delle fasi  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sui bordi dei tagli. In particolare,  $\theta_1 \rightarrow 0$  sul bordo superiore e  $\theta_1 \rightarrow 2\pi$  sul bordo inferiore, mentre i valori sono "invertiti" per la fase  $\theta_2$ , che tende a  $-\pi$  sul bordo superiore e  $+\pi$  sul bordo inferiore. Per effetto della trasformazione  $z \rightarrow w = 1/z$  il taglio infinito  $(1, \infty)$  nel piano  $z$ , in verde nella figura in alto, si trasforma nel taglio finito  $(0, 1)$  nel piano  $w$ , ancora

in verde nella figura in basso. Il taglio infinito  $(-1, \infty)$  nel piano  $z$ , in due tonalità di rosso nella figura in alto, può essere definito dall'unione del taglio finito  $(-1, 0]$ , in rosso scuro, e di quello infinito  $(0, \infty)$ , in rosso chiaro. Il primo si trasforma nel taglio infinito  $(-\infty, 0)$  nel piano  $w$ , in rosso nella figura in basso, il secondo nel taglio, sempre infinito,  $(0, \infty)$ , in rosso chiaro nella figura in basso. Si ottiene così che il taglio complessivo nel piano  $w$  è  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Infatti nel segmento reale  $(0, 1)$  i due tagli si cancellano, ovvero l'integranda nella variabile  $w$  continua in  $(-1, 1)$ . Le fasi sui bordi si invertono, come mostrato nella figura in basso, in quanto cambiano segno le parti immaginarie. Quindi nell'origine si avranno i valori:  $\theta_1^0 = 0$  e  $\theta_2^0 = -\pi$ , da sotto;  $\theta_1^0 = 2\pi$  e  $\theta_2^0 = \pi$ , da sopra. Ovviamente le due coppie di valori sono equivalenti, ovvero si ha il residuo

$$\text{Res} [f(z), z = \infty] = -e^{i(\theta_1^0 + \theta_2^0)/2} = \begin{cases} -e^{i(0-\pi)/2} = -e^{-i\pi/2} = i & \theta_1^0 = 0, \theta_2^0 = -\pi \\ -e^{i(2\pi+\pi)/2} = -e^{3i\pi/2} = i & \theta_1^0 = 2\pi, \theta_2^0 = \pi \end{cases}.$$

In definitiva si ha

$$J = i\pi (\text{Res} [f(z), z_1] + \text{Res} [f(z), z_2] + \text{Res} [f(z), \infty]) = \pi \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right),$$

che, ovviamente, coincide con quello precedente.

## SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si trovi il dominio di convergenza,  $C$ , della serie bilatera

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{2^k + 1}} (z - z_0)^k.$$

### SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Le serie bilatere convergono per corone circolari, quindi il dominio di convergenza sarà una corona circolare di centro  $z_0$ . I raggi, interno ed esterno, si determinano con il metodo di Cauchy-Hadamard. Procediamo suddividendo la serie nella parte regolare, con potenze non nulle e la parte principale che contiene, invece, tutte le potenze negative,

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2^k}{\sqrt{2^k + 1}} (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{2^k + 1}} (z - z_0)^k.$$

Nella parte principale facciamo il cambiamento di variabile  $w = (z - z_0)^{-1}$  e quello di indice  $k = -m$ , si ha

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-m}}{\sqrt{2^{-m} + 1}} w^m + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{2^k + 1}} (z - z_0)^k.$$

Abbiamo due serie di potenze positive che convergono per cerchi, quindi, possiamo usare il metodo di Cauchy-Hadamard per determinarne i raggi di convergenza.

Per la parte regolare si ha

$$R_2 = \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^k}{\sqrt{2^k + 1}} \right|^{1/k} \right)^{-1} = \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} |2^{k/2}|^{1/k} \right)^{-1} = (2^{1/2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi la parte regolare converge per tutti i valori di  $z$  tali che:  $|z - z_0| < 1/\sqrt{2}$ .

Consideriamo la parte principale nella variabile  $w$ , con lo stesso procedimento si ottiene

$$R_1' = \left( \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{-m}}{\sqrt{2^{-m} + 1}} \right|^{1/m} \right)^{-1} = \left( \limsup_{m \rightarrow \infty} |2^{-m}|^{1/m} \right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2,$$



quindi la parte principale converge se

$$|w| < R'_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - z_0|} < R'_1 \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| > \frac{1}{R'_1} \equiv R_1 = \frac{1}{2}.$$

Infine, la serie bilatera converge se convergono sia la parte principale che quella regolare, vale a dire che entrambe le condizioni devono essere verificate

$$\{|z - z_0| < R_2\} \cap \{|z - z_0| > R_1\}.$$

L'intersezione definisce il dominio di convergenza  $C$ , ovvero la corona circolare di centro  $z_0$

$$C = \{z : 1/2 < |z - z_0| < 1/\sqrt{2}\}.$$

### TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$L = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{4^z}{z^4 + 1} dz,$$

il cammino di integrazione l'asse immaginario percorso da  $\text{Im}(z) = -\infty$  a  $\text{Im}(z) = \infty$ .

#### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Con la sostituzione  $z = ix$  si ha

$$L = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{4^z}{z^4 + 1} dz = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4^{ix}}{x^4 + 1} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix \ln(4)}}{x^4 + 1} dx.$$

Poichè  $\ln(4) > 0$  e sulla circonferenza di raggio  $R$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{z^4 + 1} \stackrel{\text{unif.}}{=} 0,$$

si può usare il lemma di Jordan chiudendo il percorso d'integrazione nel semipiano  $\text{Im}(z) > 0$ , ovvero

$$L = \lim_{R \rightarrow \infty} i \oint_{C_R^+ \cup [-R, R]} \frac{e^{iz \ln(4)}}{z^4 + 1} dz = -2\pi \sum_{k: \text{Im}(z_k) > 0} \text{Res} \left( \frac{e^{iz \ln(4)}}{z^4 + 1}, z_k \right).$$

L'integranda ha quattro poli semplici  $z_k = e^{i\pi(2k-1)/4}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , primi due appartengono al semipiano  $\text{Im}(z)$ , quindi

$$\begin{aligned} L &= -2\pi \sum_{k=1}^2 \text{Res} \left( \frac{e^{iz \ln(4)}}{z^4 + 1}, z_k \right) = -2\pi \sum_{k=1}^2 \frac{e^{iz_k \ln(4)}}{4z_k^3} = -2\pi \left( \frac{e^{iz_1 \ln(4)}}{4z_1^3} + \frac{e^{iz_2 \ln(4)}}{4z_2^3} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \left( e^{i(z_1 \ln(4) - 3\pi/4)} + e^{i(z_2 \ln(4) - \pi/4)} \right) = -\frac{\pi}{2} \left( e^{i(\ln(4)(1+i)/\sqrt{2} - 3\pi/4)} + e^{i(\ln(4)(-1+i)/\sqrt{2} - \pi/4)} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-\ln(4)/\sqrt{2}} e^{-i\pi/2} \left( e^{i(\ln(4)/\sqrt{2} - \pi/4)} + e^{i(-\ln(4)/\sqrt{2} + \pi/4)} \right) = i\pi 4^{-1/\sqrt{2}} \cos \left( \ln(4)/\sqrt{2} - \pi/4 \right). \end{aligned}$$

Da cui si ottiene il risultato finale

$$L = i\pi 2^{-\sqrt{2}} \cos \left( \sqrt{2} \ln(2) - \pi/4 \right).$$

### QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si ottenga la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}.$$

**Suggerimento:** La funzione  $f(x)$  potrebbe essere una derivata nota.

## SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La funzione è l'opposto della derivata seconda della tangente iperbolica, infatti

$$\frac{d^2}{dx^2} \tanh(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\cosh^2(x)} = -2 \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)} = -2f(x).$$

Ne consegue che la trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}_k [f(x)] = -\frac{1}{2} \mathcal{F}_k \left[ \frac{d^2}{dx^2} \tanh(x) \right] = \frac{k^2}{2} \mathcal{F}_k [\tanh(x)].$$

La trasformata di Fourier della tangente iperbolica

$$\mathcal{F}_k [\tanh(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x) e^{-ikx} dx,$$

l'integrale può essere calcolato nel piano complesso come segue. Consideriamo il percorso rettangolare chiuso  $Q_R$ ,

$$Q_R = [-R, R] \cup \{z : z = R + iy, y \in [0, \pi]\} \cup \{z : z = x + i\pi, x \in [-R, R]\} \cup \{z : z = -R + iy, y \in [0, \pi]\},$$

che,  $\forall R > 0$ , contiene il solo polo semplice  $z_0 = i\pi/2$  dell'integranda. Ne consegue che

$$\begin{aligned} 2i\pi \operatorname{Res} [\tanh(z) e^{-ikz}, z_0] &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{Q_R} \tanh(z) e^{-ikz} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^R \tanh(x) e^{-ikx} dx + \int_R^{-R} \tanh(x + i\pi) e^{-ik(x+i\pi)} dx \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^\pi \tanh(R + iy) e^{-ik(R+iy)} dy + i \int_\pi^0 \tanh(-R + iy) e^{-ik(-R+iy)} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x) e^{-ikx} dx + e^{k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x) e^{-ikx} dx \\ &= (1 + e^{k\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{F}_k [\tanh(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x) e^{-ikx} dx = \frac{i\sqrt{2\pi} \operatorname{Res} [\tanh(z) e^{-ikz}, z_0]}{1 + e^{k\pi}}.$$

Il residuo

$$\operatorname{Res} [\tanh(z) e^{-ikz}, z_0] = \lim_{z \rightarrow i\pi/2} \tanh(z) e^{-ikz} (z - i\pi/2) = e^{k\pi/2},$$

e quindi la trasformata di Fourier della tangente iperbolica

$$\mathcal{F}_k [\tanh(x)] = \frac{i\sqrt{2\pi} e^{k\pi/2}}{1 + e^{k\pi}} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh(k\pi/2)}.$$

La trasformata di Fourier cercata

$$\tilde{f}(k) = \frac{k^2}{2} \mathcal{F}_k [\tanh(x)] = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2}{\cosh(k\pi/2)}.$$

## QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

L'operatore  $\hat{A}$  definito in termini dei vettori della base ortonormale  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$  come

$$\hat{A} = |e_1\rangle\langle e_1| + i|e_2\rangle\langle e_3| - i|e_3\rangle\langle e_2| - |e_4\rangle\langle e_4|,$$

in uno spazio di Hilbert  $E_4$  a 4 dimensioni.

Si ricavi la matrice  $A$ , che rappresenta l'operatore rispetto alla base data. Si calcolino autovalori e autovettori, questi ultimi, sia in rappresentazione matriciale che in forma "ket".

## SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La base ortonormale quindi gli elementi di matrice si ottengono come  $A_{ij} = \langle e_i | \hat{A} | e_j \rangle$ , con  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono  $a_{1,2} = 1$  e  $a_{3,4} = -1$  e si ottengono come soluzione dell'equazione caratteristica

$$\det(A - aI) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & i & 0 \\ 0 & -i & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-a \end{pmatrix} = 0$$

$$(a-1)^2(a+1)^2 = 0.$$

Gli autovettori in notazione matriciale sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In notazione "ket", usando i vettori della base  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$ , si hanno

$$|v_1\rangle = |e_1\rangle, \quad |v_2\rangle = \frac{|e_2\rangle - i|e_3\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |v_3\rangle = \frac{|e_2\rangle + i|e_3\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |v_4\rangle = |e_4\rangle.$$

## SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

In uno spazio di Hilbert  $H_N$  di dimensione  $N \in \mathbb{N}$ , definito l'operatore

$$\hat{O} = \frac{1}{2} (\hat{I} + |a\rangle\langle a|),$$

con  $|a\rangle \in H_N$ , tale che  $\langle a|a\rangle = 1$ .

Si dimostri che lo spettro discreto dell'operatore  $\sigma = \{1, 1/2, \dots, 1/2\}$ , ovvero che l'operatore  $\hat{O}$  ha  $N-1$  autovalori degeneri uguali a  $1/2$  e un autovalore non degenero uguale a  $1$ . Si determini un insieme di possibili autovettori.

## SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

immediato osservare che l'azione dell'operatore sul vettore  $|a\rangle$  dà lo stesso vettore  $|a\rangle$ , infatti

$$\hat{O}|a\rangle = \frac{1}{2} (\hat{I} + |a\rangle\langle a|) |a\rangle = \frac{1}{2} (|a\rangle + |a\rangle\langle a|a\rangle) = \frac{1}{2} (|a\rangle + |a\rangle) = |a\rangle.$$

Ne consegue che  $|a\rangle$  è un autovettore di  $\hat{O}$  con autovalore  $\alpha_1 = 1$ . Consideriamo una base ortonormale dello spazio  $H_N$ , che abbia come primo vettore  $|a\rangle$ , ovvero  $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ , con  $|u_1\rangle = |a\rangle$  e quindi  $\langle a|u_k\rangle = 0$  per ogni  $k = 2, 3, \dots, N$ . L'azione di  $\hat{O}$  sugli ultimi vettori  $|u_k\rangle$ ,  $k \geq 2$ ,

$$\hat{O}|u_k\rangle = \frac{1}{2} (\hat{I} + |a\rangle\langle a|) |u_k\rangle = \frac{1}{2} (|u_k\rangle + |a\rangle \underbrace{\langle a|u_k\rangle}_{=0}) = \frac{1}{2} |u_k\rangle, \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Questa è l'equazione agli autovalori di  $\hat{O}$ , per cui i vettori  $\{|u_k\rangle\}_{k=2}^N$  sono autovettori degeneri con lo stesso autovalore  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 1/2$ . Si è ottenuto lo spettro discreto desiderato, ovvero

$$\sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} = \{1, 1/2, \dots, 1/2\}.$$