# Metodi Matematici per la Fisica

## Prova scritta del 10 dicembre 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver determinato l'insieme $D \subset (0, \infty)$ dei valori reali positivi del parametro $\beta$ per i quali si ha convergenza, si calcoli l'integrale

$$T(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{2\beta} + x^\beta + 1}{x^{4\beta} + 1}\, dx\,.$$

### Soluzione del primo problema

Il dominio di convergenza può essere determinato sia studiando la funzione integranda nella forma originale che a seguito di una sostituzione.
Consideriamo, quindi, i comportamenti del modulo della funzione integranda in corrispondenza degli estremi di integrazione

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^{2\beta} + x^\beta + 1}{x^{4\beta} + 1}\right| &\underset{x\to 0^+}{\sim} 1 \Rightarrow \text{è sempre integrabile;}\\
\left|\frac{x^{2\beta} + x^\beta + 1}{x^{4\beta} + 1}\right| &\underset{x\to \infty}{\sim} x^{-2\beta} \Rightarrow \text{è integrabile se } \beta > 1/2\,.
\end{aligned}$$

L'intersezione delle due condizioni coincide con la seconda per cui si ha $D = \{\beta : \beta > 1/2\}$.
Con la sostituzione $u = x^\beta$, si ha

$$T(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{u^2 + u + 1}{u(u^4 + 1)} u^{1/\beta} du = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty R(u)\, u^{1/\beta} du\,,$$

dove con $R(u)$ si è indicata la funzione razionale

$$R(u) = \frac{u^2 + u + 1}{u(u^4 + 1)}\,.$$

I comportamenti di questa funzione agli estremi di integrazione sono

$$R(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u^{-1}\,, \qquad R(u) \underset{u\to \infty}{\sim} u^{-3}\,,$$

da cui si ha la condizione di convergenza

$$-1 - (-1) < \mathrm{Re}(1/\beta) < -1 - (-3) \quad \Rightarrow \quad 0 < 1/\beta < 2 \quad \Rightarrow \quad \beta > 1/2\,.$$

Ne consegue che, come già ottenuto dallo studio della funzione integranda originale, il dominio di convergenza è $D = \{\beta : \beta > 1/2\}$.
La funzione integranda possiede cinque poli semplici, l'origine e le quattro radici quarte di meno uno, cioè

$$u_0 = 0\,, \qquad u_k = e^{(2k-1)i\pi/4}\,, \qquad k = 1, 2, 3, 4\,.$$

La formula nota per la risoluzione dell'integrale è

$$T(\beta) = -\frac{\pi e^{-i\pi/\beta}}{\beta \operatorname{sen}(\pi/\beta)} \sum_{k=0}^{4} \operatorname{Res}\left[R(u)u^{1/\beta}, u_k\right],$$

per la cui validità si richiedono la convergenza dell'integrale, nonché l'assenza di poli sul semi-asse reale positivo. Entrambe queste condizioni sono verificate nel caso in studio.
Calcoliamo i residui della funzione integranda $R(u)e^{1/\beta}$, si hanno

$$\operatorname{Res}\left[R(u)u^{1/\beta}, u_0 = 0\right] = \lim_{u\to 0} R(u)u^{1/\beta}u = \lim_{u\to 0} u^{1/\beta}\frac{u^2+u+1}{u^4+1} = 0$$

$$\operatorname{Res}\left[R(u)u^{1/\beta}, u_k\right] = \lim_{u\to u_k} R(u)u^{1/\beta}(u-u_k) = u_k^{1/\beta-1}\frac{u_k^2+u_k+1}{4u_k^3} = -\frac{1}{4}\left(u_k^{1/\beta+2} + u_k^{1/\beta+1} + u_k^{1/\beta}\right), \qquad k = 1,2,3,4.$$

In generale, la somma di una potenza $\alpha$ degli ultimi quattro residui vale

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} u_k^\alpha &= \sum_{k'=0}^{4} u_{k'+1}^\alpha = \sum_{k'=0}^{3} e^{(2k'+1)i\pi\alpha/4} = e^{i\pi\alpha/4}\sum_{k'=0}^{3}\left(e^{i\pi\alpha/2}\right)^{k'} = e^{i\pi\alpha/4}\frac{1-e^{2i\pi\alpha}}{1-e^{i\pi\alpha/2}} = e^{i\pi\alpha}\frac{e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}}{e^{-i\pi\alpha/4}-e^{i\pi\alpha/4}} \\ &= e^{i\pi\alpha}\frac{-2i\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{-2i\operatorname{sen}(\pi\alpha/4)} = e^{i\pi\alpha}\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi\alpha/4)},\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Res}\left[R(u)u^{1/\beta}, u_k\right] &= -\frac{1}{4}\left(e^{i\pi/\beta+2i\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi/\beta+2\pi)}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta)+\pi/2)} + e^{i\pi/\beta+i\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi/\beta+\pi)}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta)+\pi/4)} + e^{i\pi/\beta}\frac{\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))}\right) \\ &= -\frac{e^{i\pi/\beta}}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{\cos(\pi/(4\beta))} - \frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))+\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))}\right) \\ &= -\frac{e^{i\pi/\beta}\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{4}\left(\frac{1}{\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))+\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))}\right).\end{aligned}$$

Infine, il risultato completo è

$$\begin{aligned}T(\beta) &= -\frac{\pi e^{-i\pi/\beta}}{\beta\operatorname{sen}(\pi/\beta)}\sum_{k=0}^{4}\operatorname{Res}\left[R(u)u^{1/\beta}, u_k\right] \\ &= \frac{\pi e^{-i\pi/\beta}}{\beta\operatorname{sen}(\pi/\beta)}\frac{e^{i\pi/\beta}\operatorname{sen}(\pi/\beta)}{4}\left(\frac{1}{\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))+\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))}\right) \\ &= \frac{\pi}{4\beta}\left(\frac{1}{\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))+\cos(\pi/(4\beta))} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/(4\beta))}\right).\end{aligned}$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga, in funzione di $n \in \mathbb{N}$, l'espressione degli integrali

$$G_n = \oint_{|z|=(2n+1)/2}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}dz.$$

### Soluzione del secondo problema

La funzione Gamma di Eulero non ha zeri, ne consegue che gli unici poli della funzione integranda coincidono con quelli della funzione Gamma, che ne rappresenta il numeratore, che non siano compensati da poli dello stesso ordine della funzione Gamma che invece ne rappresenta il denominatore. Le uniche singolarità della funzione $\Gamma(z)$ sono poli semplici che si trovano nei punti dell'insieme $\{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$. Inoltre, il residuo del polo $k$-esimo è

$$\operatorname{Res}\left[\Gamma(z); z_k = -k\right] = \frac{(-1)^k}{k!}, \qquad -k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza di raggio $(2n+1)/2 = n+1/2$ e centro nell'origine, avvolge una sola volta gli $(n+1)$ poli della funzione Gamma che verificano la condizione

$$|z_k| = k < n + \frac{1}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ad eccezione dell'origine, che rappresenta per la funzione integranda una singolarità eliminabile, i rimanenti $n$ poli semplici delle funzione Gamma rappresentano dei poli semplici anche per la stessa funzione integranda. Verifichiamo che l'origine sia una singolarità eliminabile calcolando il valore limite dell'integranda. A tal fine usiamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \phi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z+k)(-k)!},$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera e quindi non ha singolarità al finito. Il valore limite della funzione integranda nell'origine vale $-1$, infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} &= \lim_{z\to 0} \frac{+\phi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z+k)(-k)!}}{+\phi(-z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-z+k)(-k)!}} = \lim_{z\to 0} \frac{\phi(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z+k)(-k)!}}{\phi(-z) - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-z+k)(-k)!}} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z\phi(z) + 1 + z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z+k)(-k)!}}{z\phi(-z) - 1 + z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-z+k)(-k)!}} = -1.
\end{aligned}$$

per cui l'origine rappresenta una singolarità eliminabile.
Infine, gli integrali cercati si ottengono usando il teorema dei residui, cioè

$$G_n = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}; z_k = -k\right].$$

Il $k$-esimo residuo è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}; z_k = -k\right] = \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!(k-1)!},$$

ne consegue

$$G_n = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k-1)!}.$$

## Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z\,(z^8+z^4+1)}.$$

### Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa in quanto rapporto di polinomi, ovvero di funzioni intere. Ha quindi solo singolarità polari in corrispondenza degli zeri del polinomio a denominatore non coincidenti con poli dello stesso ordine o di ordine superiore del polinomio a numeratore. Quest'ultimo ha solo due zeri semplici nei punti $z = \pm i$. Gli otto poli dovuti al polinomio di ottavo grado si ottengono come

$$z^8 + z^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z_\pm^4) = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3} \quad \Rightarrow \quad z_{\pm,m} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3 + 2im\pi}, \quad m = 1, 2, 3, 4,$$

che, assieme al polo nell'origine, rappresentano gli elementi dell'insieme dei nove poli semplici $\{z_k\}_{k=0}^{8}$, ovvero

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0, \\
z_k &= e^{i\pi(k-1/3)/2}, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \\
z_k &= e^{i\pi(k+1/3)/2}, \qquad k = 5, 6, 7, 8.
\end{aligned}$$

Si tratta effettivamente di poli semplici, poiché nessuno di essi coincide con uno dei due zeri del polinomio a numeratore. I residui sono

$$R_0 = \mathrm{Res}\,[f(z), z_0 = 0] = \lim_{z\to 0} f(z)z = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{z^8+z^4+1} = 1\,,$$
$$R_k = \mathrm{Res}\,[f(z), z_k] = \lim_{z\to z_k} f(z)(z-z_k) = \frac{z_k^2+1}{4z_k^4\left(2z_k^4+1\right)}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, 8\,.$$

Il termine $2z_k^4+1$ a denominatore, avendo che $z_k^8+z_k^4+1=0$, può essere scritto come

$$2z_k^4+1 = z_k^4 + \underbrace{z_k^4+1}_{=-z_k^8} = z_k^4 - z_k^8 = z_k^4(1-z_k^4) = z_k^4(1-z_k^2)(1+z_k^2)\,.$$

Ne consegue che gli ultimi otto residui sono

$$R_k = \frac{1}{4z_k^8(1-z_k^2)} = \frac{z_k^{-9}}{4(z_k^{-1}-z_k)} = \frac{1}{-8i}\begin{cases} \dfrac{e^{-9ik\pi/2+3i\pi/2}}{\mathrm{sen}(k\pi/2-\pi/6)} = \dfrac{2(-i)^{k+1}}{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)-\cos(k\pi/2)} & k=1,2,3,4 \\ \dfrac{e^{-9ik\pi/2-3i\pi/2}}{\mathrm{sen}(k\pi/2+\pi/6)} = \dfrac{-2(-i)^{k+1}}{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)+\cos(k\pi/2)} & k=5,6,7,8 \end{cases}$$

$$R_k = -\frac{(-i)^k}{4}\begin{cases} \dfrac{1}{\cos(k\pi/2)-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)} & k=1,2,3,4 \\ \dfrac{1}{\cos(k\pi/2)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)} & k=5,6,7,8 \end{cases}\,,$$

da cui

$$R_1 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=1} = \frac{i}{4}\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{i}{4\sqrt{3}}\,,$$
$$R_2 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=2} = \frac{1}{4}\frac{1}{-1} = -\frac{1}{4}\,,$$
$$R_3 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=3} = -\frac{i}{4}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{i}{4\sqrt{3}}\,,$$
$$R_4 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1} = -\frac{1}{4}\,,$$
$$R_5 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=5} = \frac{i}{4}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{i}{4\sqrt{3}}\,,$$
$$R_6 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=6} = \frac{1}{4}\frac{1}{-1} = -\frac{1}{4}\,,$$
$$R_7 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=7} = -\frac{i}{4}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{i}{4\sqrt{3}}\,,$$
$$R_8 = -\frac{(-i)^k}{4}\frac{1}{\cos(k\pi/2)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}\bigg|_{k=8} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1} = -\frac{1}{4}\,.$$

Riassumendo, a parte il residuo unitario nell'origine, gli ultimi otto residui assumono solo tre valori diversi, $\pm i/(4\sqrt{3})$, quelli con indice dispari della seconda e prima quaterna, rispettivamente, e $-1/4$, quelli con indice pari, in dettaglio

$$R_0 = 1\,, \qquad R_1 = R_3 = -R_5 = -R_7 = -\frac{i\,\mathrm{sen}(\pi/6)}{2\sqrt{3}} = -\frac{i}{4\sqrt{3}}\,, \qquad R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = -\frac{\cos(\pi/6)}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{4}\,.$$

Infine, è immediato verificare che all'infinito la funzione $f(z)$ è regolare, ha infatti limite nullo e quindi che la parte intera dello sviluppo di Mittag-Leffler è anch'essa identicamente nulla. Alla luce di quest'ultima considerazione si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{8}\frac{R_k}{z-z_k} = \frac{1}{z} - \frac{i}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-e^{i\pi/3}} + \frac{1}{z-e^{4i\pi/3}} - \frac{1}{z-e^{2i\pi/3}} - \frac{1}{z-e^{5i\pi/3}}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-e^{5i\pi/6}} + \frac{1}{z-e^{11i\pi/6}} + \frac{1}{z-e^{7i\pi/6}} + \frac{1}{z-e^{i\pi/6}}\right).$$

## Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sia

$$\|\Omega\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} |e_k\rangle \otimes |e_k\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \|e_k e_k\rangle\rangle$$

il vettore somma dei prodotti diretti dei vettori omologhi della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ dello spazio di Hilbert a $N$ dimensioni $E_N$. Con il simbolo $\|ab\rangle\rangle$ si indica un vettore prodotto diretto dei due vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ dello spazio di Hilbert $E_N$, cioè $\|ab\rangle\rangle \equiv |a\rangle \otimes |b\rangle \in E_N \otimes E_N$. Si ha che, dati due operatori generici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ in $E_N$, l'azione dell'operatore prodotto diretto $\widehat{AB} \equiv \hat{A} \otimes \hat{B}$ è così definita

$$\widehat{AB}\|ab\rangle\rangle = \hat{A}|a\rangle \otimes \hat{B}|b\rangle \equiv \|a'b'\rangle\rangle \in E_N \otimes E_N\,,$$

con: $|a'\rangle = \hat{A}|a\rangle$ e $|b'\rangle = \hat{B}|b\rangle$.
Si dimostri che il vettore $\|\Omega\rangle\rangle$ è il punto fisso dell'operatore $\widehat{U^\dagger U^T}$, per ogni operatore unitario $\hat{U}$ nello spazio di Hilbert $E_N$. L'operatore trasposto $\hat{U}^T$ è definito dalla relazione

$$\langle e_k|\hat{U}^T|e_j\rangle = \langle e_j|\hat{U}|e_k\rangle\,, \qquad \forall\, k,j \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Si verifichi, infine, l'identità

$$\langle\langle\Omega\|\widehat{AI}\|\Omega\rangle\rangle = \langle\langle\Omega\|\hat{A}\otimes\hat{I}\|\Omega\rangle\rangle = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\big(\hat{A}\big)\,,$$

dove $\hat{A}$ è un generico operatore nello spazio di Hilbert $E_N$, mentre $\hat{I}$ è l'operatore identità.

## Soluzione del quarto problema

Consideriamo direttamente l'azione dell'operatore $\widehat{U^\dagger U^T}$ sul vettore $\|\Omega\rangle\rangle$, si ha

$$\widehat{U^\dagger U^T}\|\Omega\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \widehat{U^\dagger U^T}\|e_k e_k\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \hat{U}^\dagger|e_k\rangle \otimes \hat{U}^T|e_k\rangle\,.$$

Usiamo la notazione matriciale, per cui gli elementi della matrice $A$, $N\times N$, che rappresenta il generico operatore $\hat{A}$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$, si ottengono dall'azione dello stesso operatore sui vettori della base come

$$\hat{A}|e_k\rangle = A^j_k|e_j\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Da ciò, considerando anche che $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, segue

$$\begin{aligned}\widehat{U^\dagger U^T}\|\Omega\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \hat{U}^\dagger|e_k\rangle \otimes \hat{U}^T|e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \hat{U}^{-1}|e_k\rangle \otimes \hat{U}^T|e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \big(U^{-1}\big)^j_k\,|e_j\rangle \otimes \underbrace{\big(U^T\big)^m_k}_{U^k_m}|e_m\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \underbrace{\big(U^{-1}\big)^j_k\,U^k_m}_{\delta^j_m}|e_j\rangle \otimes |e_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle = \|\Omega\rangle\rangle\,,\end{aligned}$$

dove le somme sugli indici ripetuti in posizione contro-variante (alto) e covariante (basso) sono sottintese, mentre vengono scritte esplicitamene quando gli indici sono ripetuti nella stessa posizione.
Calcoliamo il valore di aspettazione di un generico operatore $\widehat{AI}$ rispetto al vettore $\|\Omega\rangle\rangle$,

$$\langle\langle\Omega\|\widehat{AI}\|\Omega\rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k,j=1}^{N} \big(\langle e_j| \otimes \langle e_j|\big)\big(\hat{A}|e_k\rangle \otimes |e_k\rangle\big) = \frac{1}{N} \sum_{k,j=1}^{N} \langle e_j|\hat{A}|e_k\rangle\langle e_j|e_k\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k,j=1}^{N} A^j_k\delta^j_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A^k_k = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\big(\hat{A}\big)\,,$$

si ha quindi l'identità richiesta.

## Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x-\beta|^\alpha},$$

con $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ è

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha\pi/2)\,e^{-i\beta k}|k|^{\alpha-1}.$$

## Soluzione del quinto problema

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier, facendo la sostituzione $x' = x - \beta$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{|x-\beta|^\alpha}dx = \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx'}}{|x'|^\alpha}dx'.$$

Suddividiamo l'intervallo d'integrazione nella semiretta dei valori reali negativi in cui poniamo $x' = re^{i\pi}$, con $r$ che va da $\infty$ a 0, e positivi in cui usiamo $x' = r$, con $r$ da 0 a $\infty$. Con queste prescrizioni l'integrale della trasformata di Fourier diventa

$$\tilde{f}(k) = -\frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}}e^{i\pi(1-\alpha)}\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{ikr}dr + \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{-ikr}dr.$$

Calcoliamo questo integrale per $k>0$, facendo la sostituzione $t = i|k|r$,

$$\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{ikr}dr = (i|k|)^{\alpha-1}\int_{L_+}t^{-\alpha}e^t dt = -(i|k|)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^0 t^{-\alpha}e^t dt = -(-i|k|)^{\alpha-1}\int_\infty^0 t^{-\alpha}e^{-t}dt = (-i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Se, ivece, $k<0$, posto $t = -i|k|r$, si ha

$$\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{ikr}dr = (-i|k|)^{\alpha-1}\int_{L_-}t^{-\alpha}e^t dt = -(-i|k|)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^0 t^{-\alpha}e^t dt = -(i|k|)^{\alpha-1}\int_\infty^0 t^{-\alpha}e^{-t}dt = (i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Consideriamo il secondo integrale, che differisce dal primo solo per il segno dell'esponente della fase; con $k>0$ e la sostituzione $t = -i|k|r$, avremo

$$\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{-ikr}dr = (-i|k|)^{\alpha-1}\int_{L_-}t^{-\alpha}e^t dt = -(-i|k|)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^0 t^{-\alpha}e^t dt = -(i|k|)^{\alpha-1}\int_\infty^0 t^{-\alpha}e^{-t}dt = (i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Infine, per $k<0$ e ponendo $t = i|k|r$

$$\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{-ikr}dr = (i|k|)^{\alpha-1}\int_{L_+}t^{-\alpha}e^t dt = -(i|k|)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^0 t^{-\alpha}e^t dt = -(-i|k|)^{\alpha-1}\int_\infty^0 t^{-\alpha}e^{-t}dt = (-i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Gli stessi risultati possono essere ottenuti osservando che i due integrali che compaiono nella definizione di trasformata di Fourier sono l'uno il complesso coniugato dell'altro. Ne consegue che i valori del secondo integrale nei due casi $k>0$ e $k<0$ sono

$$\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{-ikr}dr = \left(\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{ikr}dr\right)^* = \begin{cases} \left[(-i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\right]^* = (i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) & k>0 \\ \left[(i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\right]^* = (-i|k|)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) & k<0 \end{cases},$$

ovvero i valori già ottenuti con la trattazione completa.
Per arrivare a questi risultati abbiamo più volte usato la rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-t}dt.$$

Verifichiamo se, sotto le ipotesi del problema, la condizione di convergenza, $\mathrm{Re}(1-\alpha) > 0$, sia verificata. Poiché il parametro $\alpha$ è reale e inoltre $0 < \alpha < 1$, si ha banalmente che $\mathrm{Re}(1-\alpha) > 0 = 1-\alpha > 0$ e che, quindi, la rappresentazione è valida.
Un altro risultato che è stato utilizzato è l'annullamento dei limiti, per $R \to \infty$, degli integrali sui due archi centrati nell'origine, sottendenti un angolo apri a $\pi/2$ radianti e appartenenti al secondo quadrante, nei casi del primo integrale con $k > 0$ e del secondo con $k < 0$, e terzo quadrante nei casi rimanenti. Consideriamo ad esempio il primo integrale con $k > 0$, in questo caso l'arco appartiene al secondo quadrante e sottende l'angolo di $\pi/2$ radianti, ovvero i suoi punti hanno fasi comprese tra $\pi/2$ e $\pi$, cioè $\gamma_R = \{z : z = Re^{i\tau}, \tau \in [\pi/2, \pi]\}$. Affinché si abbia

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} z^{-\alpha} e^{ikz} dz = 0\,,$$

è necessario che valga il limite

$$\lim_{R\to\infty} z^{-\alpha+1} e^{ikz} \overset{\text{unif.}}{=} 0\,.$$

Per verificarlo studiamo il modulo della funzione $z^{-\alpha+1}e^{ikz}$, ovvero la funzione integranda moltiplicata per $z$, con $z = R^{i\tau}$ e $\tau \in [\pi/2, \pi]$, si ha

$$\left|z^{-\alpha+1} e^{ikz}\right| = \left|z^{-\alpha+1} e^{i|k|z}\right| = R^{-\alpha+1} e^{-|k|R\,\mathrm{sen}(\tau)} \le R^{-\alpha+1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,,$$

poiché $-\alpha+1 > 0$. La verifica negli altri tre casi si ottiene con una trattazione analoga.
Sostituendo i risultati così ottenuti nella definizione della trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(k) = -\frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi(1-\alpha)} \int_0^\infty r^{-\alpha} e^{ikr} dr + \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^{-\alpha} e^{-ikr} dr\,,$$

per $k > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)\left((-i)^{\alpha-1} + i^{\alpha-1}\right) = \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) i \left(e^{-i\pi\alpha/2} - e^{i\pi\alpha/2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\beta k} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\pi\alpha/2)\,.\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene per $k < 0$, infatti

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)\left(i^{\alpha-1} + (-i)^{\alpha-1}\right) = \frac{e^{-i\beta k}}{\sqrt{2\pi}} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) i \left(-e^{i\pi\alpha/2} - e^{-i\pi\alpha/2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\beta k} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\pi\alpha/2)\,.\end{aligned}$$

Ne consegue che, $\forall\, k \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\beta k} |k|^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\pi\alpha/2)\,,$$

che coincide con l'espressione cercata.

## Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e si calcoli la matrice modulo quadro $|A|^2$.

## Soluzione del sesto Problema

Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 2\right] = 0\,,$$

ovvero gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_j & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda_j & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad j = 1,2,3\,.$$

Nel caso di $\lambda_1 = 1$, dalla seconda equazione si ha $x_1 = 0$ e dalla prima $y_1 = -z_1$, posto $y_1 = -z_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{|x_1|^2 + |y_1|^2 + |z_1|^2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Per $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$, poniamo $x_{2,3} = 1$ e dalla seconda e terza equazione si ottiene

$$y_{2,3} = z_{2,3} = -\frac{1}{1-\lambda_{2,3}} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\,,$$

quindi il secondo e terzo autovettore sono

$$v_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{|x_{2,3}|^2 + |y_{2,3}|^2 + |z_{2,3}|^2}}\begin{pmatrix} x_{2,3} \\ y_{2,3} \\ z_{2,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i/\sqrt{2} \\ \mp i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \mp i \\ \mp i \end{pmatrix}\,.$$

Si tratta di una terna di autovettori ortonormali, quindi la matrice diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \\ -1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

è unitaria. In particolare, si ha, rispetto alla base degli stessi autovettori, la rappresentazione diagonale

$$A_d = U^\dagger A U = \mathrm{diag}(1, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2})\,.$$

Il modulo quadro di $A_d$ è

$$|A_d|^2 = A_d A_d^* = \mathrm{diag}\left(1, \left|1+i\sqrt{2}\right|^2, \left|1-i\sqrt{2}\right|^2\right) = \mathrm{diag}\,(1,3,3)\,.$$

Infine, la rappresentazione rispetto alla base originale della matrice modulo quadro $|A|^2$ si ottiene come

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= U|A_d|^2 U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \\ -1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/2 & i/2 \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & -i/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \\ -1/\sqrt{2} & -i/2 & i/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 3i/2 & 3i/2 \\ 3/\sqrt{2} & -3i/2 & -3i/2 \end{pmatrix} \\
|A|^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$