

Teoria delle perturbazioni e modi quasinormali dei buchi neri di Kerr

Laurea Triennale in Fisica, a.a. 2024-2025

Candidato:

Jacopo Tanganelli

Relatore:

Professor Gianluca Grignani



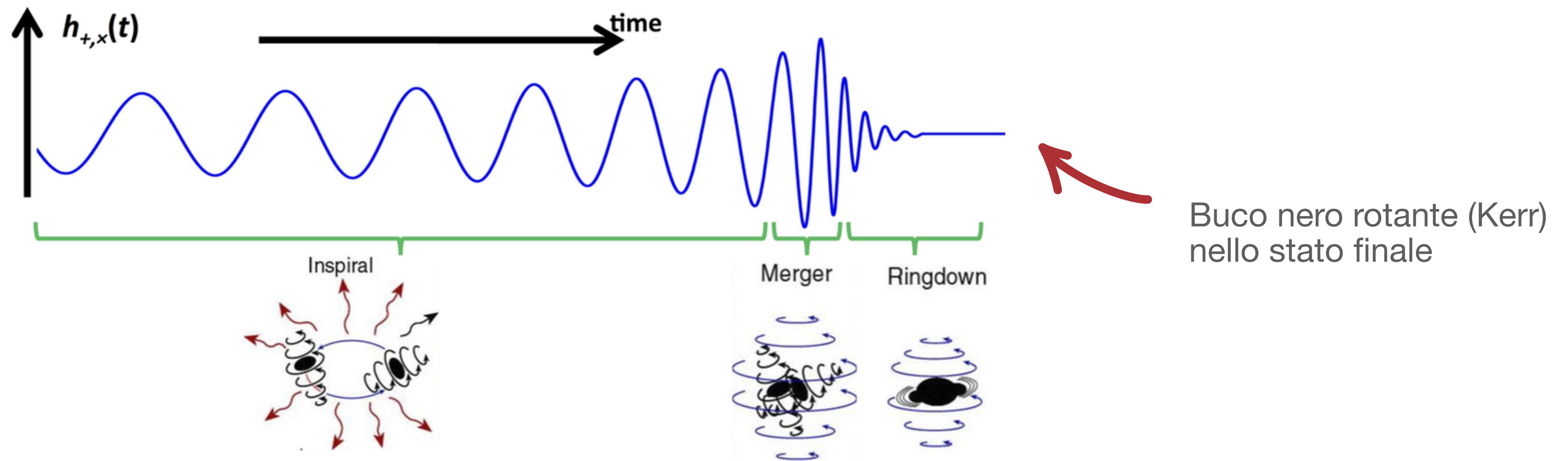
A.D. 1308

unipg

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI PERUGIA

30/04/2026

Ringdown dei buchi neri



Crediti: M. Favata/SXS/K. Thorne

Percorso

- Teoria delle perturbazioni di buco nero
- Formalismo Newman-Penrose
- Equazione di Teukolsky
- Modi quasinormali e metodo di Leaver
- Applicazione al ringdown

Teoria delle perturbazioni di buco nero


L'approccio migliore per l'analisi del ringdown è quello perturbativo. Metodo diretto:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Soluzione di *background*
esatta, stazionaria, nota

Perturbazione

Si sostituisce l'ansatz in $R_{\mu\nu} = 0$ e si tengono i termini fino al primo ordine, ottenendo un sistema di 10 equazioni accoppiate per $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$.

- Per background di Schwarzschild si riesce a disaccoppiarle [T. Regge e J. A. Wheeler (1957); F. J. Zerilli (1970)]  nel caso di Kerr no!
- La perturbazione è definita a meno di una trasformazione di gauge

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

Teoria delle perturbazioni e onde gravitazionali

Lontano dalla sorgente, per un'onda gravitazionale che si propaga in direzione z

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_{0\mu} = 0.$$

Si può dimostrare la seguente relazione con lo *scalare di Weyl* Ψ_4 , definito nel contesto del formalismo *Newman-Penrose*

$$\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times = \Psi_4, \quad \longrightarrow \quad \text{scalare complesso, } \underline{\text{gauge invariante}}.$$

Formalismo Newman-Penrose

Una *tetrad* è un insieme di quattro campi vettoriali $\{e_a^\mu\}_{a,\mu=0}^3$ tali che

$$e_a^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab}, \quad \text{con } \eta_{ab} \text{ costante simmetrica.}$$

Il formalismo Newman-Penrose (NP) si basa sulla scelta di una tetrad nulla:

$$e_1^\mu = l^\mu, \quad e_2^\mu = n^\mu, \quad e_3^\mu = m^\mu, \quad e_4^\mu = \bar{m}^\mu.$$

con $e_a^\mu e_{b\mu} = 0$ per ogni \mathbf{a}, \mathbf{b} eccetto $l^\mu n_\mu = 1$ e $m^\mu \bar{m}_\mu = -1$.

Ovvero:

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nel formalismo, le variabili dinamiche sono scalari complessi, ottenuti proiettando le quantità (tensoriali) fisiche rilevanti sui vettori della tetrad
- Il tensore di Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ è la parte a “traccia nulla” ($C^\lambda_{\mu\lambda\nu} = 0$) del tensore di Riemann. È determinato da 10 quantità reali indipendenti: nel formalismo NP si definiscono 5 *scalari di Weyl* complessi

$$\Psi_0 (= -C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma), \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$$

[E. Newman e R. Penrose (1962)]

Metrica di Kerr

Metrica in coordinate Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2$$

$$c = G = 1$$

$$M, J = aM$$

$$0 \leq J/M^2 \leq 1$$

Metrica stazionaria e simmetrica per rotazioni attorno all'asse $\sin \theta = 0$, descrive un buco nero rotante

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2$$

Radici: $r_{\pm} = M \pm M \sqrt{1 - \left(\frac{a}{M}\right)^2}$

r_+ è l'orizzonte del buco nero di Kerr

No hair theorem: spazio-tempo nel vuoto, asintoticamente piatto e stazionario è descritto dalla metrica di Kerr.

Perturbazioni della metrica di Kerr

Teukolsky ha ottenuto equazioni disaccoppiate per perturbazioni gravitazionali della geometria di Kerr, sfruttando la semplicità della sua descrizione con il formalismo NP [S. A. Teukolsky (1973)].

Si considerano le perturbazioni degli scalari NP corrispondenti alla perturbazione della metrica $\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Tutte le quantità possono essere decomposte in un termine di background e uno di perturbazione

$$\Psi_0 = \Psi_0^A + \Psi_0^B, \quad \text{ecc...}$$

La tetrad può essere scelta in modo tale che il termine di background di alcuni degli scalari di Weyl sia nullo

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a),$$

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \quad \text{Tetrad di Kinnersley}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2} (r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right).$$

$$\Psi_0^A = \Psi_1^A = \Psi_3^A = \Psi_4^A = 0$$

$$\Psi_2^A = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3}$$

Spazio-tempo di tipo D secondo la classificazione di Petrov [A.Z. Petrov (1954)].

Perturbazioni della metrica di Kerr

Usando la tetrad di Kinnersley si ottengono equazioni disaccoppiate per la perturbazione degli scalari di Weyl Ψ_0 e Ψ_4

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \phi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi_s}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} \right) \\ & - 2s \left[\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi_s}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi_s = 0 \end{aligned}$$

Teukolsky master equation (TME)

Compare il *peso di spin* $s = \pm 2$: $\psi_2 = \Psi_0^B, \quad \psi_{-2} = (r - ia \cos \theta)^4 \Psi_4^B$

Perturbazioni della metrica di Kerr

- Un risultato di Wald assicura che ognuno dei due scalari Ψ_4^B e Ψ_0^B contiene tutta l'informazione sulla perturbazione gravitazionale $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} \text{ e } h'_{\mu\nu} \text{ perturbazioni tali che } \Psi_4^B \text{ (o } \Psi_0^B) \text{ sia uguale per entrambe} \implies h_{\mu\nu} - h'_{\mu\nu} = 2 \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} + c_M \frac{\partial g_{\mu\nu}^{\text{Kerr}}}{\partial M} + c_a \frac{\partial g_{\mu\nu}^{\text{Kerr}}}{\partial a}$$

- La proprietà notevole della TME è che è possibile separare le variabili e considerare soluzioni della forma

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r).$$

Perturbazioni della metrica di Kerr

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r)$$

Equazione radiale e angolare:

$$\Delta \frac{d^2 R}{dr^2} + (s+1)(2r-1) \frac{dR}{dr} + V(r) R = 0,$$

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{dS}{du} \right] + \left[a^2 \omega^2 u^2 - 2a\omega s u + s + A - \frac{(m+su)^2}{1-u^2} \right] S = 0,$$

- r riscalato di un fattore $2M$, e $u = \cos \theta$
- A costante di separazione



Condizioni al contorno di regolarità per $S(\theta)$ in $u = \pm 1$

- $A = {}_s A_{lm}(a\omega)$ autovalori costante di separazione
- $S(\theta) = {}_s S(u; a\omega)$ autofunzioni (armoniche sferiche nel caso $s, a = 0$)

Modi quasinormali

- Il problema delle perturbazioni si riduce allo studio di un'equazione d'onda tipo-Schrödinger con potenziale determinato dalla geometria di background
- La dipendenza dal tempo di una soluzione della TME è $\sim e^{-i\omega t}$
- I modi quasinormali (QNMs) sono soluzioni per cui si impongono condizioni al contorno “fisiche”: propagazione verso l'interno all'orizzonte e verso l'esterno a infinito.

- Nel caso di Schwarzschild

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{l,m} \frac{1}{r} R_l(r, \omega) Y_l^m(\theta, \phi), \quad R_l \sim \begin{cases} (r-1)^{-i\omega} & \text{per } r \rightarrow 1, \\ r^{i\omega} e^{i\omega r} & \text{per } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

- Imponendo le condizioni al contorno si ottiene uno spettro discreto di frequenze complesse con $\text{Im}(\omega) < 0$
- Oscillazione smorzata da un'esponenziale decrescente. Il carattere dissipativo è una conseguenza dell'orizzonte

Metodo di Leaver

È, ad oggi, il metodo migliore per la stima numerica delle frequenze quasinormali dei buchi neri di Schwarzschild e Kerr [E. W. Leaver (1985)].

- Per il caso di Schwarzschild, soluzione dell'equazione radiale della forma

$$R_l = (r - 1)^{-i\omega} r^{2i\omega} e^{i\omega(r-1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n.$$

- Si ottiene una relazione di ricorrenza a tre termini per i coefficienti della serie

$$\begin{aligned} \alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 &= 0, \\ \alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad \text{con } \alpha_n, \beta_n \text{ e } \gamma_n \text{ funzioni di } \omega, l, s$$

- Si inverte la relazione di ricorrenza. Le condizioni al contorno sono soddisfatte se vale la seguente relazione tra α_n, β_n e γ_n

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 - \dots}}}$$



Equazione caratteristica di Leaver: le frequenze quasinormali sono le radici di questa equazione.

Metodo di Leaver per Kerr

Il metodo di Leaver può essere direttamente esteso al caso delle perturbazioni di buchi neri rotanti

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{l,m} e^{im\phi} R_{lm}(r) {}_sS_{lm}(\cos \theta; a\omega).$$

Possiamo considerare sviluppi in serie per le funzioni angolari e radiali, ottenendo una coppia di relazioni di ricorrenza a tre termini.

- Equazione angolare: condizioni al contorno di regolarità in $\cos \theta = \pm 1$

$$0 = \beta_0^\theta - \frac{\alpha_0^\theta \gamma_1^\theta}{\beta_1^\theta - \frac{\alpha_1^\theta \gamma_2^\theta}{\beta_2^\theta - \dots}}, \quad \text{Equazione per la costante di separazione } {}_sA_{lm}(a\omega),$$
$$l = |s|, |s| + 1, \dots, \quad |m| \leq l.$$

- Equazione radiale: condizioni al contorno dei QNM per $r \rightarrow r_+$ e $r \rightarrow \infty$

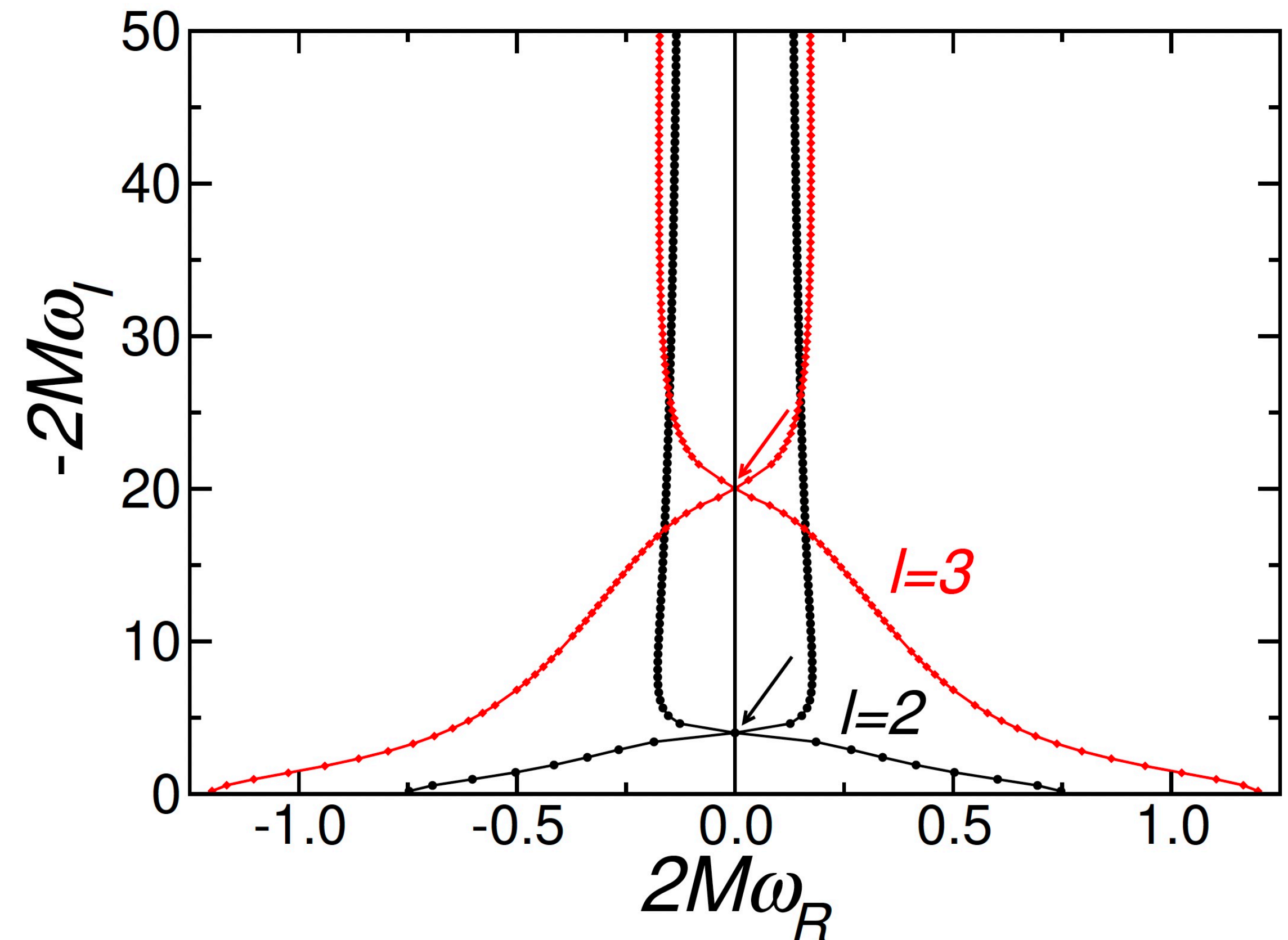
$$0 = \beta_0^r - \frac{\alpha_0^r \gamma_1^r}{\beta_1^r - \frac{\alpha_1^r \gamma_2^r}{\beta_2^r - \dots}}, \quad \text{Fissati } a, m, s \text{ e } {}_sA_{lm}(a\omega), \text{ equazione caratteristica per } \omega.$$

Spettro di Schwarzschild

- Fissato l , si ha una successione di infinite frequenze, indicizzate con n , in ordine di parte immaginaria decrescente.
- Simmetria rispetto all'asse immaginario
- Modo fondamentale:

$$f = 1.207 \left(\frac{10M_{\odot}}{M} \right) \text{ kHz},$$

$$\tau = 0.5538 \left(\frac{M}{10M_{\odot}} \right) \text{ ms}.$$



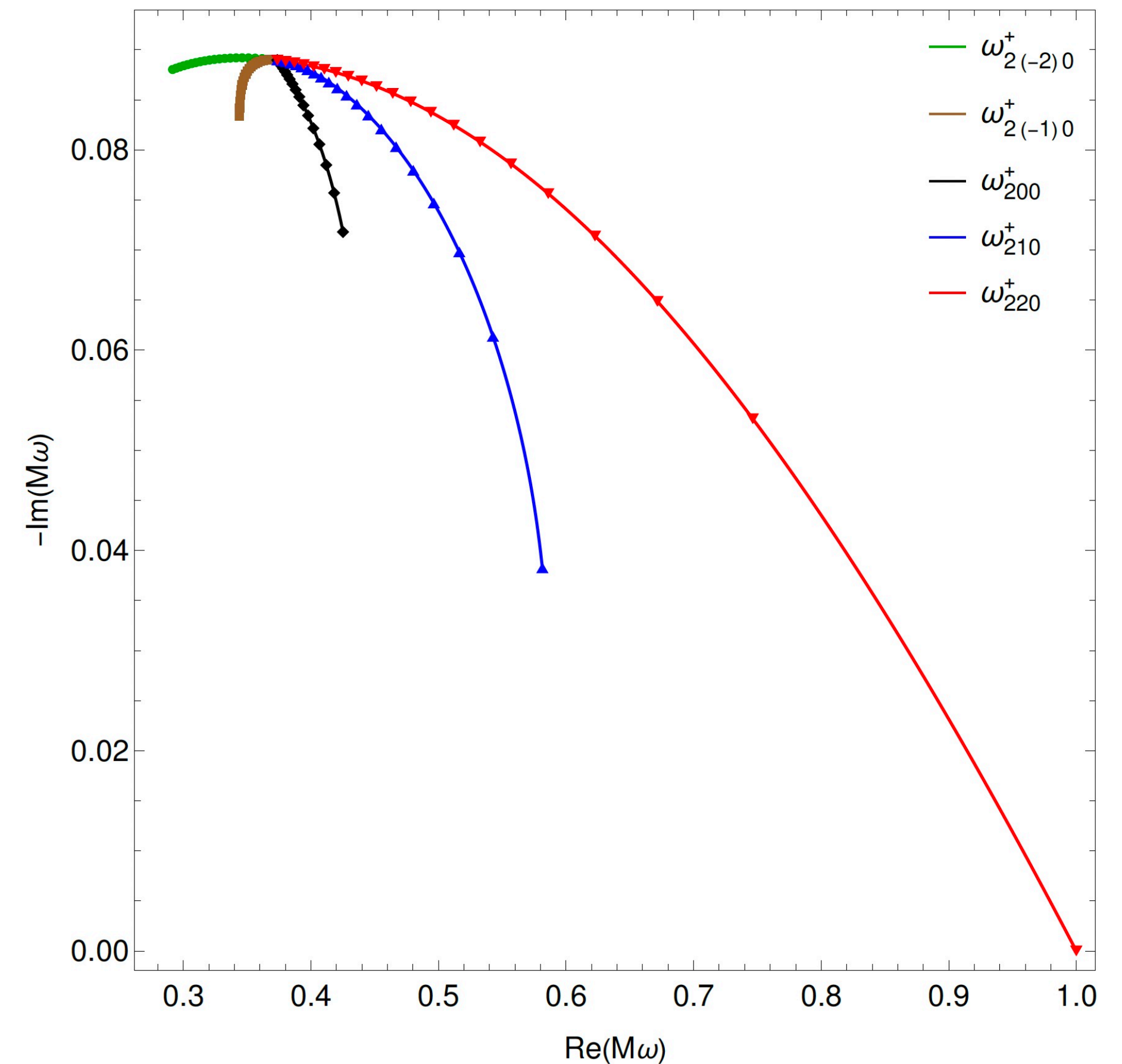
[E. Berti, V. Cardoso e A. O. Starinets (2009)]

Spettro di Kerr

- Fissati l e m , si ottiene una successione di frequenze indicizzate con n che, al variare del parametro a descrivono curve nel piano complesso
- Due rami di frequenze con parte reale positiva e negativa $\omega_{lmn}^{\pm}(a)$, simmetria rispetto all'asse immaginario:

$$\omega_{lmn}^{-} = -\bar{\omega}_{l(-m)n}^{+}$$

- La rotazione ha l'effetto di separare le frequenze per i diversi modi azimutali $-l \leq m \leq l$.



[E. Berti, V. Cardoso, G. Carullo et al. (2025)]

QNMs nel ringdown

Usiamo la relazione $\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times = \Psi_4$ e per la perturbazione consideriamo l'andamento asintotico per $r \sim \infty$, ottenendo

$$h_+ - ih_\times = \frac{M}{r} \sum_{lmn} \mathcal{A}_{lmn} e^{i\omega_{lmn}(t-r_*+\varphi_{lmn})} {}_{-2}S_{lm}(\theta, \phi),$$

Coordinata *tortoise*:

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad r_* \sim r + \ln r$$

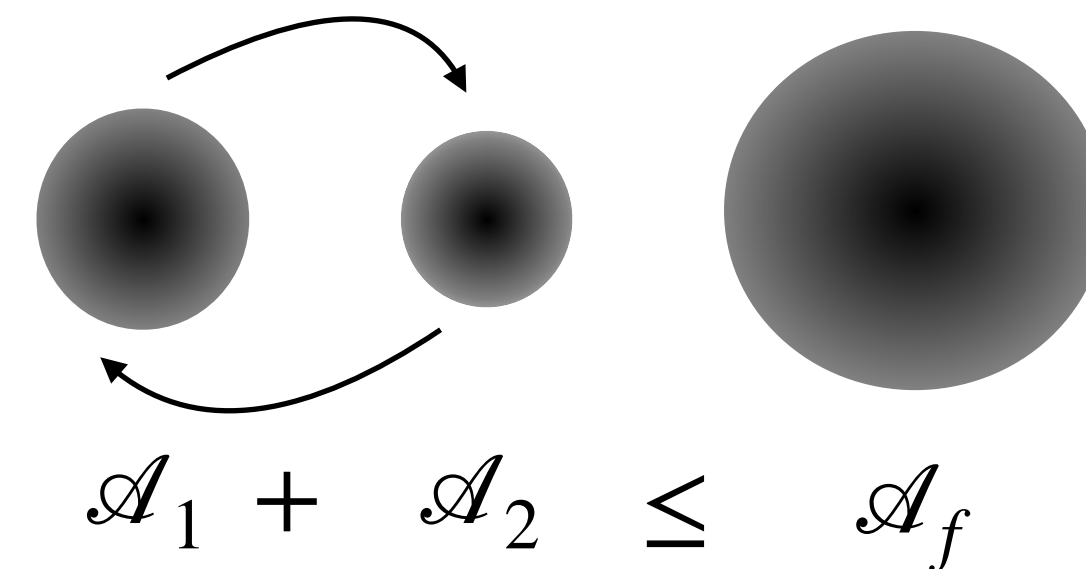
- Le frequenze quasinormali dipendono esclusivamente da M e J del buco nero di Kerr

→ Verifica del teorema *no hair*

→ Verifica della *legge dell'area* di Hawking

GW250114, [LIGO-Virgo-KAGRA (2025)]

$$\mathcal{A}(M, J) = 8\pi M^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M^2} \right)^2} \right).$$



Grazie per l'attenzione



A.D. 1308

unipg

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI PERUGIA

Jacopo Tanganelli - 30/04/2026

Perturbazioni in RG

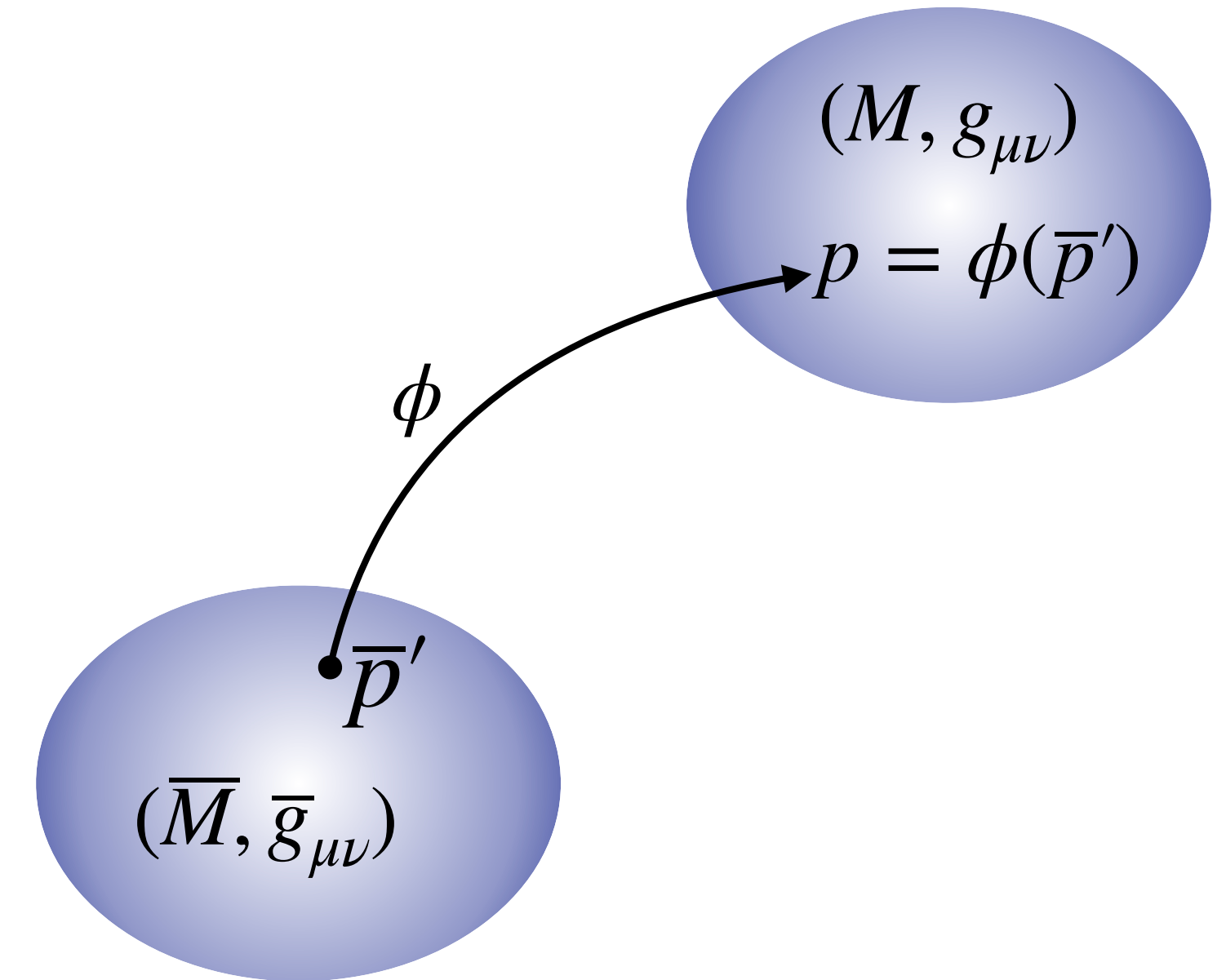
$$(\bar{M}, \bar{g}_{\mu\nu}) \rightarrow (M, g_{\mu\nu}) = (\bar{M}, \bar{g}_{\mu\nu}) + \text{“}\varepsilon\text{”}$$

Va definito in modo consistente il confronto tra quantità definite sulle due varietà. Consideriamo una mappa differenziabile:

$$\phi : \bar{M} \rightarrow M.$$

Possiamo confrontare il pullback della metrica dello spazio-tempo perturbato con la metrica di background

$$\delta_\phi g_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}.$$



$T_{\mu_1 \dots \mu_n}$ campo definito su M , pullback su \bar{M} :

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_n}(\bar{p}') = T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(p) \frac{\partial p^{\alpha_1}}{\partial \bar{p}^{\mu_1}} \dots \frac{\partial p^{\alpha_n}}{\partial \bar{p}^{\mu_n}}$$

Perturbazioni in RG

$$(\bar{M}, \bar{g}_{\mu\nu}) \rightarrow (M, g_{\mu\nu}) = (\bar{M}, \bar{g}_{\mu\nu}) + \text{“}\varepsilon\text{”}$$

Va definito in modo consistente il confronto tra quantità definite sulle due varietà. Consideriamo una mappa differenziabile:

$$\phi : \bar{M} \rightarrow M,$$

Altra mappa \longrightarrow $\chi : \bar{M} \rightarrow M.$

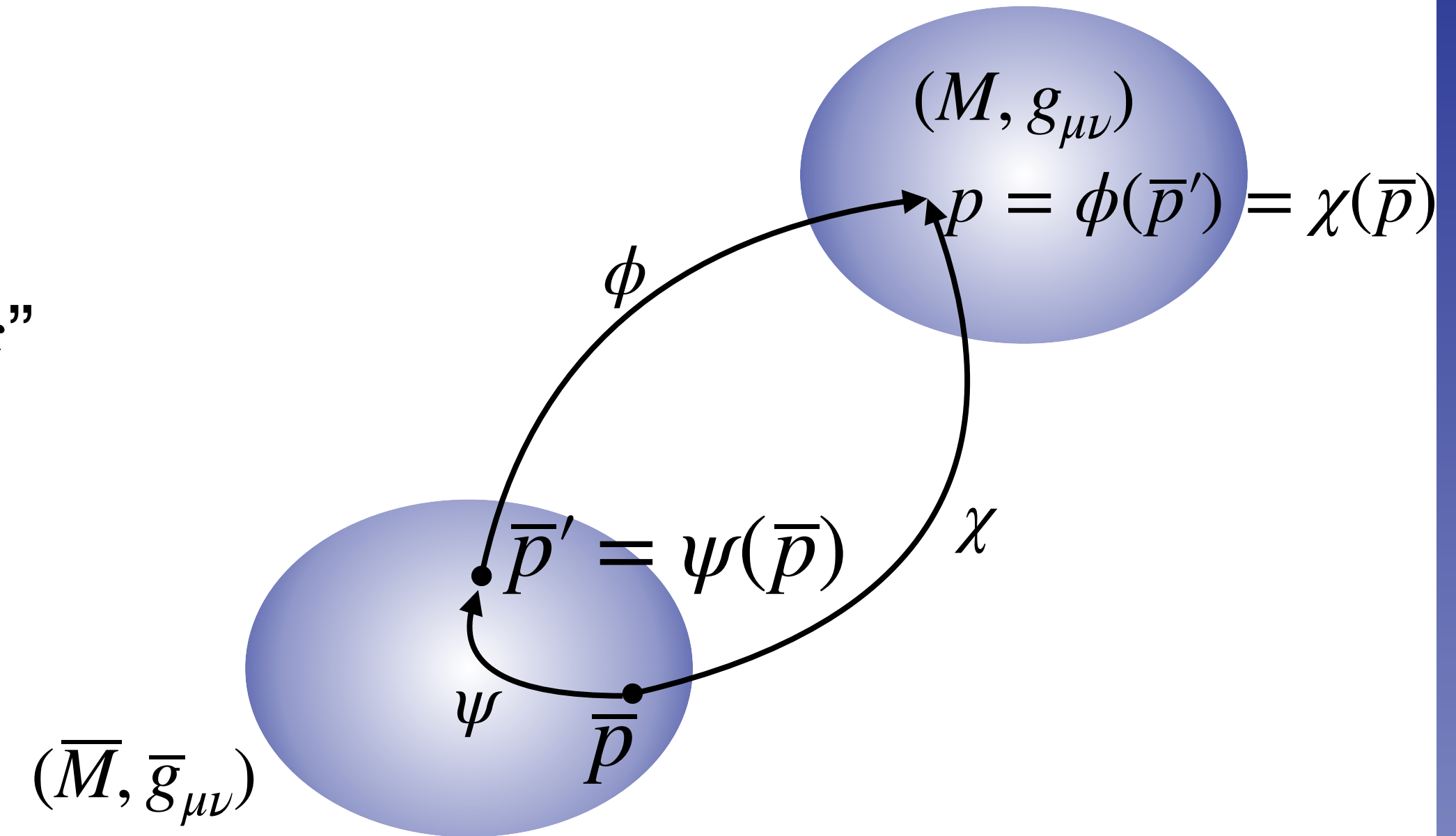
Possiamo confrontare il pullback della metrica dello spazio-tempo perturbato con la metrica di background

$$\delta_\phi g_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu},$$

$$\psi : \bar{M} \rightarrow \bar{M} \text{ tale che}$$

$$\delta_\chi g_{\mu\nu} = (\chi^* g)_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}.$$

$$\chi = \phi \circ \psi$$



$T_{\mu_1 \dots \mu_n}$ campo tensoriale su M , *pullback* su \bar{M} :

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_n}(\bar{p}') = T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(p) \frac{\partial p^{\alpha_1}}{\partial \bar{p}^{\mu_1}} \dots \frac{\partial p^{\alpha_n}}{\partial \bar{p}^{\mu_n}}$$

Perturbazioni in RG

$$\delta_\phi g_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu},$$

$\psi : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ tale che

$$\delta_\chi g_{\mu\nu} = (\chi^* g)_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}.$$

$$\chi = \phi \circ \psi$$

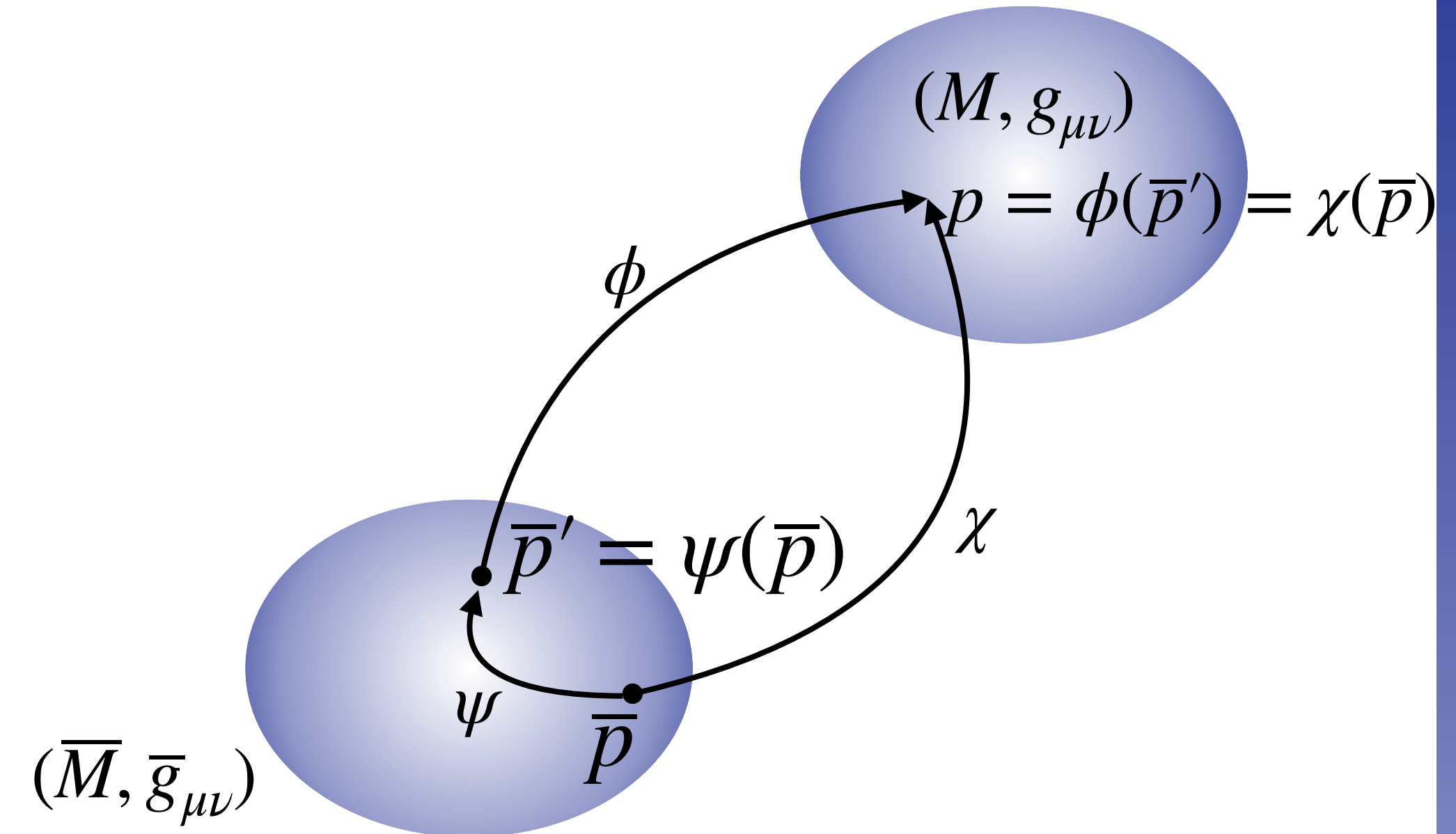
$$\begin{aligned} \delta_\chi g_{\mu\nu} - (\psi^* \delta_\phi g)_{\mu\nu} &= \varepsilon (\mathcal{L}_\xi \bar{g})_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

In molti casi si può omettere la mappa usata e definire tutte le quantità sullo spazio-tempo di background

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

dove la perturbazione $h_{\mu\nu}$ è definita a meno di una trasformazione di gauge

$$\underline{h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu}$$



Se una quantità di background $T_{\mu_1 \dots \mu_n}$ è nulla la sua perturbazione è gauge invariante.

Trasformazioni delle tetradi

Il gruppo a 6 parametri delle trasformazioni di Lorentz omogenee preserva le relazioni di “ortogonalità” della tettrade nulla definite prima, e può essere decomposto in tre classi di trasformazioni

- Classe I: $l^\mu \rightarrow l^\mu \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + al^\mu \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + \bar{a}m^\mu + a\bar{m}^\mu + a\bar{a}l^\mu$, $\longrightarrow \Psi_0$ invariato
 - Classe II: $n^\mu \rightarrow n^\mu \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + bn^\mu \quad l^\mu \rightarrow l^\mu + \bar{b}m^\mu + b\bar{m}^\mu + b\bar{b}n^\mu$, $\longrightarrow \Psi_4$ invariato
 - Classe III: $l^\mu \rightarrow Al^\mu \quad n^\mu \rightarrow A^{-1}n^\mu \quad m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu$, $\longrightarrow \Psi_2$ invariato
- con a, b complessi e A, θ reali.

Trasformazione di classe II applicata a $\Psi_0 \rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4$

Trasformazioni delle tetradi

Il gruppo a 6 parametri delle trasformazioni di Lorentz omogenee preserva le relazioni di “ortogonalità” della tettrade nulla definite prima, e può essere decomposto in tre classi di trasformazioni

- Classe I: $l^\mu \rightarrow l^\mu \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + al^\mu \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + \bar{a}m^\mu + a\bar{m}^\mu + a\bar{a}l^\mu$, $\longrightarrow \Psi_0$ invariato
 - Classe II: $n^\mu \rightarrow n^\mu \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + bn^\mu \quad l^\mu \rightarrow l^\mu + \bar{b}m^\mu + b\bar{m}^\mu + b\bar{b}n^\mu$, $\longrightarrow \Psi_4$ invariato
 - Classe III: $l^\mu \rightarrow Al^\mu \quad n^\mu \rightarrow A^{-1}n^\mu \quad m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu$, $\longrightarrow \Psi_2$ invariato
- con a, b complessi e A, θ reali.

Quattro *principal null directions* (PNDs)

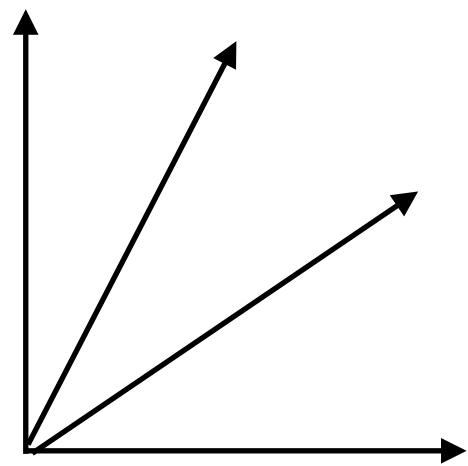
Trasformazione di classe II applicata a $\Psi_0 \rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 = 0$

Quattro radici
(eventualmente coincidenti)

Classificazione di Petrov

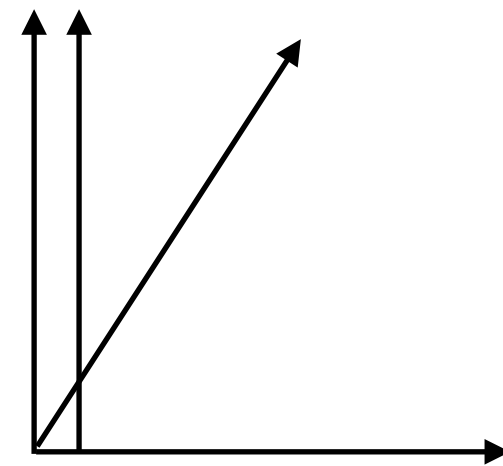
Si tratta di una classificazione degli spazi-tempo in base alle proprietà algebriche del tensore di Weyl. In particolare si classifica in base alla struttura di degenerazione delle PNDs

Tipo I



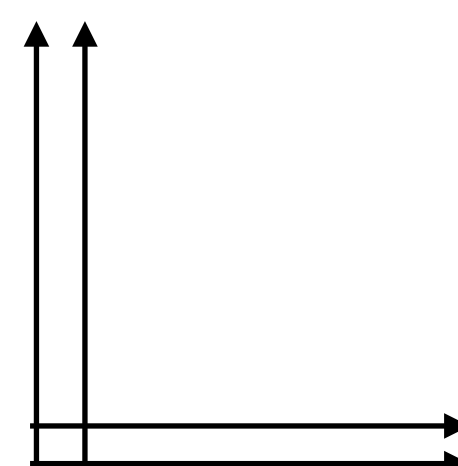
$$\Psi_0 = \Psi_4 = 0$$

Tipo II



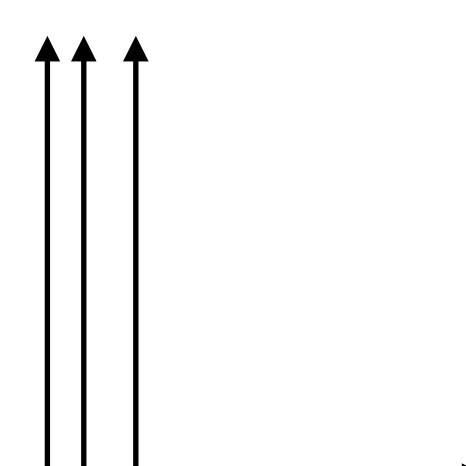
$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_4 = 0$$

Tipo D



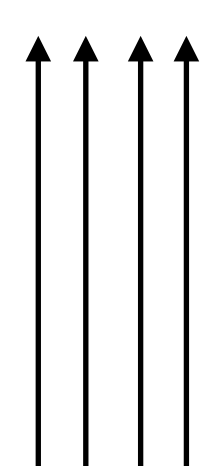
$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$$

Tipo III



$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$$

Tipo N

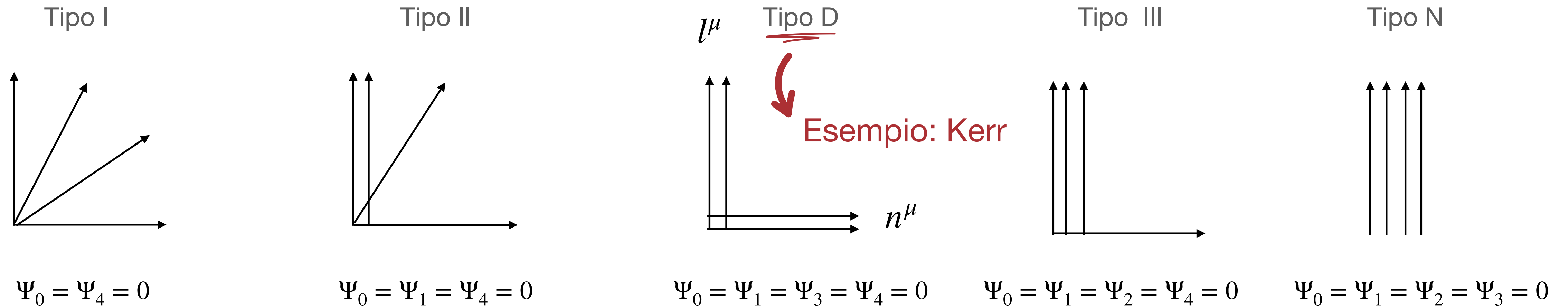


$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$$

[A.Z. Petrov (1954)]

Classificazione di Petrov

Si tratta di una classificazione degli spazi-tempo in base alle proprietà algebriche del tensore di Weyl. In particolare si classifica in base alla struttura di degenerazione delle PNDs



Il *principal null frame* è la tetrad con i vettori allineati con le PNDs ripetute, se esistenti.

[A.Z. Petrov (1954)]

Formalismo GHP

È un raffinamento del formalismo NP. Si basa sulla classificazione degli scalari NP in base al modo in cui trasformano per trasformazioni di classe III

$$(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu) \rightarrow (\lambda \bar{\lambda} l^\mu, \lambda^{-1} \bar{\lambda}^{-1} n^\mu, \lambda \bar{\lambda}^{-1} m^\mu, \lambda^{-1} \bar{\lambda} \bar{m}^\mu)$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In particolare si assegna un *peso GHP* (p, q) a una quantità η che trasforma come

$$\eta \rightarrow \lambda^p \bar{\lambda}^q \eta$$

- I coefficienti di spin $\epsilon, \gamma, \alpha, \beta$ non hanno peso GHP definito, ma sono utili a definire gli operatori differenziali

(Thorn)	$\mathfrak{p} = l^\mu \nabla_\mu - p \epsilon - q \bar{\epsilon}$	$\mathfrak{p}' = n^\mu \nabla_\mu - p \gamma - q \bar{\gamma}$	$\mathfrak{p}\eta$ ha peso $(p + 1, q + 1)$
(Eth)	$\check{\mathfrak{d}} = m^\mu \nabla_\mu - p \beta - q \bar{\alpha}$	$\check{\mathfrak{d}}' = \bar{m}^\mu \nabla_\mu - p \alpha - q \bar{\beta}$	

- Possiamo definire *' (prime)*: $(p, q) \rightarrow (-p, -q)$, ** (star)*: $(p, q) \rightarrow (p, -q)$,
- Dei restanti 8 coefficienti di spin consideriamo solo $\rho, \sigma, \tau, \kappa$. Gli altri si ottengono da questi sotto *priming*, ad esempio $\rho' = -\mu$.

[R. Geroch, A. Held e R. Penrose (1973)]

Equazioni GHP

Possiamo riscrivere le equazioni di Einstein nel vuoto e le identità di Bianchi nel formalismo GHP come relazioni tra (derivate di) coefficienti di spin e scalari di Weyl, ad esempio

$$\delta\rho - \delta'\sigma = (\rho - \bar{\rho})\tau + (\bar{\rho}' - \rho')\kappa - \Psi_1.$$

Ψ_n : peso GHP $(4 - 2n, 0)$

Alcune equazioni si ottengono da altre per priming e starring.

Per riscrivere anche le equazioni di Maxwell nel vuoto si rappresentano le 6 componenti reali del tensore del campo EM $F_{\mu\nu}$ con tre scalari NP complessi $\phi_0 (= F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu)$, ϕ_1 , ϕ_2 :

ϕ_n : peso GHP $(2 - 2n, 0)$

$$\mathfrak{p}\phi_1 - \delta'\phi_0 = -\tau'\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2$$

con la versione primed e starred dà le equazioni di Maxwell.

Perturbazioni in spazio-tempo D

Per perturbazioni gravitazionali, le equazioni disaccoppiate si possono ottenere (usando il formalismo GHP) a partire da equazioni del secondo ordine per Ψ_4 e Ψ_0 . [J.M. Stewart e M. Walker (1974)]

Tenendo solo termini del primo ordine si ottengono equazioni disaccoppiate per Ψ_4^B e Ψ_0^B

$$[p'p - \delta'\delta - (4\rho' + \bar{\rho})p - \rho p' + (4\tau' + \bar{\tau})\delta + \tau\delta' + 4\rho\rho' - 4\tau\tau' - 2\Psi_2]\Psi_4^B = 0,$$

$$[p'p - \delta'\delta - \bar{\rho}'p - 5\rho p' + \bar{\tau}\delta + 5\tau\delta' - 10\Psi_2]\Psi_0^B = 0.$$

Sono le equazioni di Teukolsky per Ψ_4^B e Ψ_0^B , l'apice A è omesso. Dato che sono perturbazioni di quantità di background nulle, sono gauge invarianti.

Analogamente si ottengono le equazioni di Teukolsky per ϕ_2 e ϕ_0 per perturbazioni elettromagnetiche

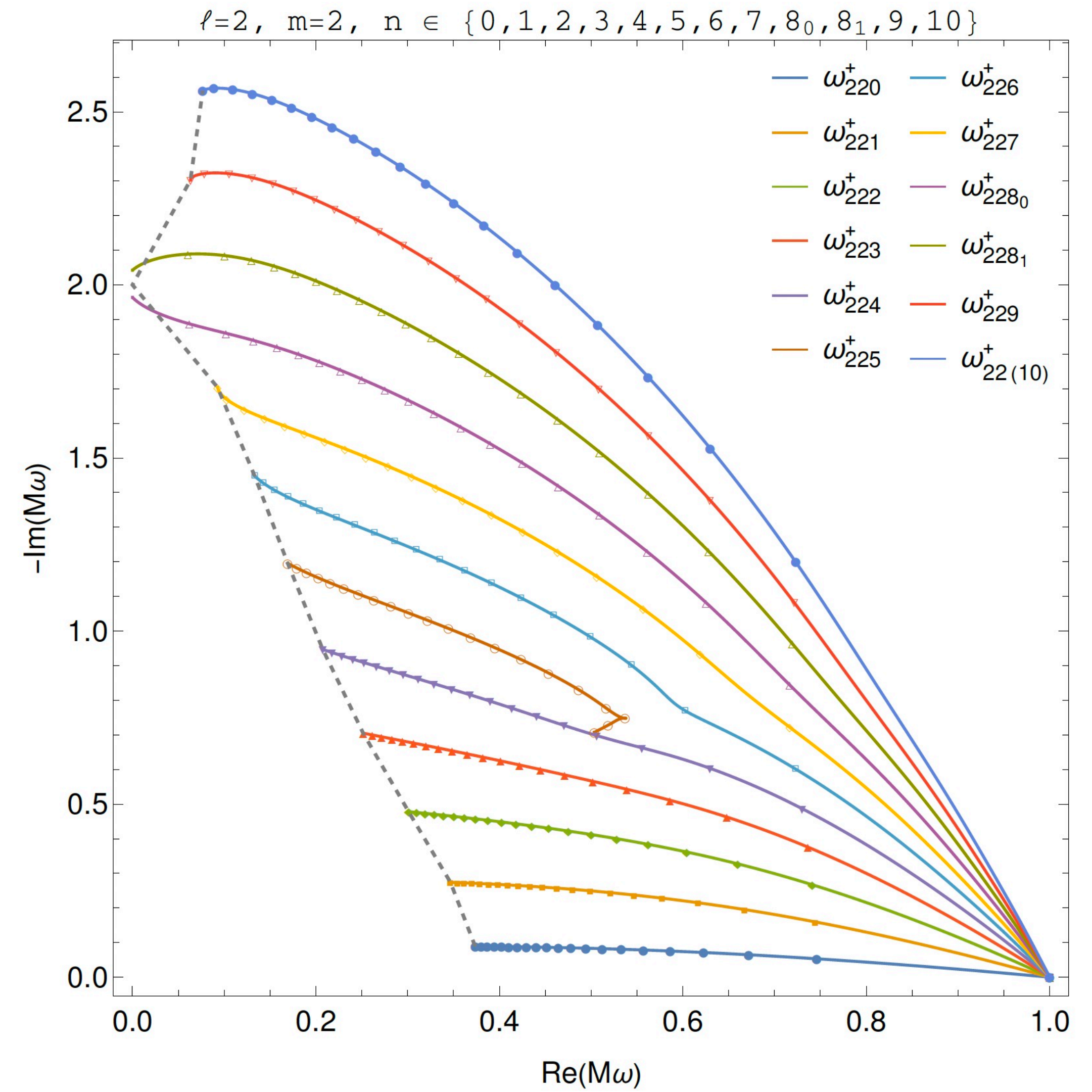
$$[p'p - \delta'\delta - \rho p' - (2\rho' + \bar{\rho}')p + \tau\delta' + (2\tau' + \bar{\tau})\delta + 2\rho'\rho - 2\tau'\tau + \Psi_2]\phi_2 = 0,$$

$$[p'p - \delta'\delta - \bar{\rho}'p - 3\rho p' + \bar{\tau}\delta + 3\tau\delta' - 3\Psi_2]\phi_0 = 0.$$

Spettro di Kerr

Modi gravitazionali $l = m = 2$ per overtones $0 \leq n \leq 10$.

La curva tratteggiata connette le frequenze nel limite di Schwarzschild.



[E. Berti, V. Cardoso, G. Carullo et al. (2025)]