CONOSCENZE di MATEMATICA necessarie al corso di Fisica

Conoscenze necessarie
Matematica

- Equivalenze! (conversione di unità di misura!)
- Geometria di base
  - Angoli di vario tipo (complementari etc…)
  - Rette parallele e perpendicolari, relazioni tra angoli
  - Triangoli, criteri di equaglianza e di similitudine, Teorema di Pitagora
  - Geometria analitica di base: rette e parabole
  - Sistemi di riferimento cartesiani e polari, trasformazione delle coordinate nei due sistemi di riferimento
- Trigonometria di base (trasparenza successiva)
- Calcolo elementare e algebra di base
  - Frazioni, MCD e mcm
  - Potenze, radici (viste come potenze), proprietà delle potenze
  - Espressioni, loro riduzione, semplificazione e fattorizzazione
  - Funzioni, dominio di validità, rappresentazione grafica
  - Funzioni elementari, loro comportamento analitico e grafico
  - Equazioni e disequazioni, significato grafico
  - Equazioni di grado 1 e 2
  - Disequazioni semplici di grado 1 e 2 razionali
  - sistemi di equazioni (1˚ e 2˚) e disequazioni (1˚)
- Concetti di Limite, Derivata e Integrale
  - Comprensione profonda dei concetti e interpretazione geometrica
  - Definizione analitica
  - Calcoli elementari su funzioni elementari e operazioni elementari

Equivalenze!
Conversione unità di misura

- Fattore di conversione unità misura
  - Partite da **relazione più banale** e se necessario invertitela

$$15m/s \Rightarrow km/h?$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{1s = \dfrac{1h}{3600}} \\ 1h = 3600s \Rightarrow (s) = \left(\dfrac{1h}{3600}\right) \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{15m}{s} \Rightarrow 15\frac{m}{\left(\dfrac{1h}{3600}\right)} \ldots$$

MET??

- Controllo di consistenza

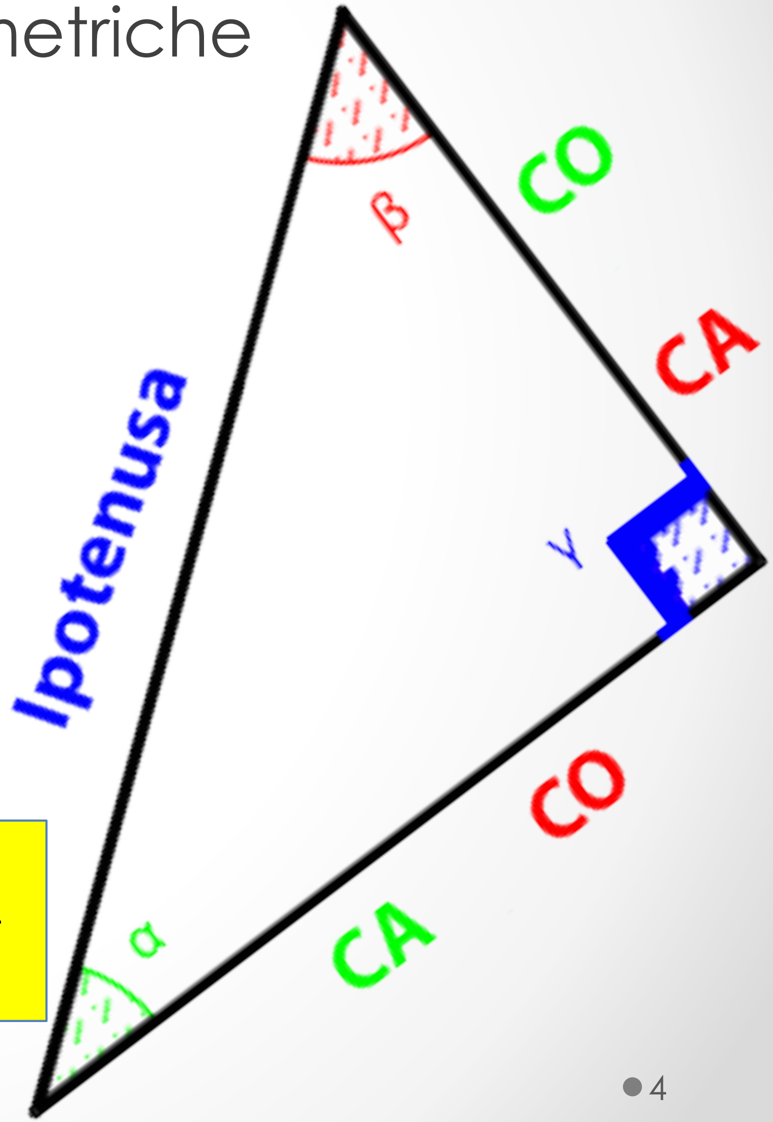
Trigonometria

- Definizioni di grandezze trigonometriche
  - Sin, cos, tg, cotg, e funzioni inverse (arcsin…)

- Circonferenza goniometrica e rapporti tra angoli che differiscono di ±90, ±180…

- Proiezioni, triangolo rettangolo, teorema Pitagora

MET



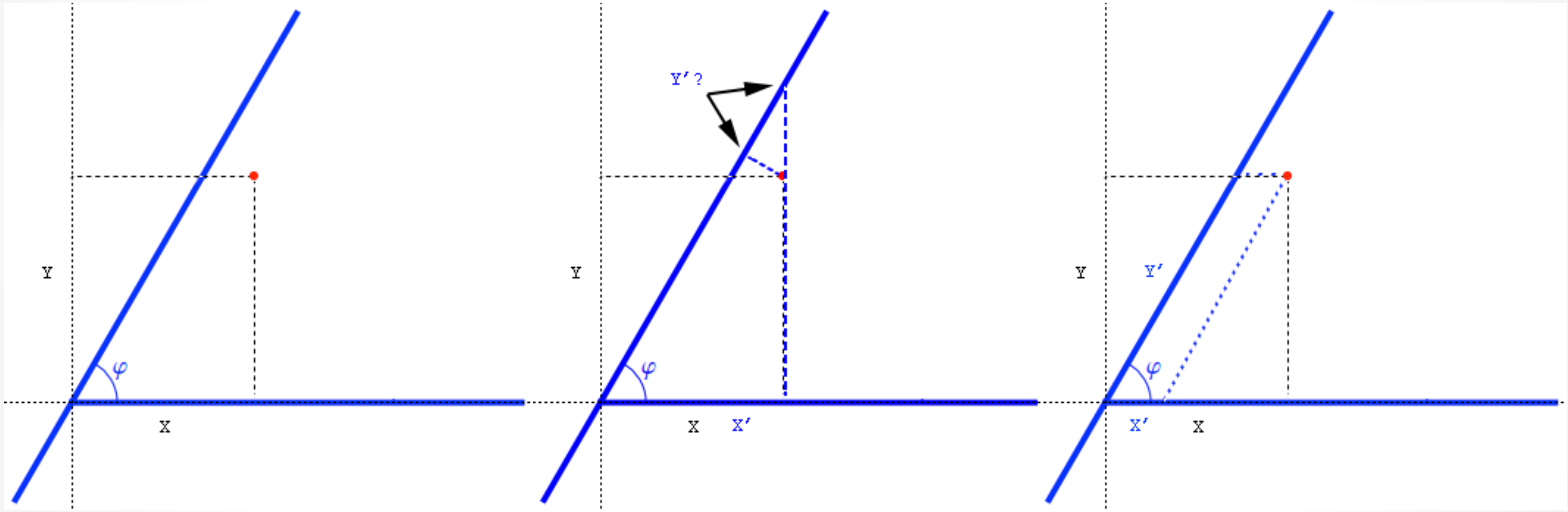
$$\sin\vartheta = \frac{CO}{Ipot} \qquad \cos\vartheta = \frac{CA}{Ipot} \qquad tg\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{CO}{CA}$$

Sistemi di coordinate

- (# di) Coordinate: (quantità di) dati necessari per descrivere univocamente la posizione di un oggetto
  - Moto su linea (anche **curva**!): una coordinata necessaria e sufficiente
  - Moto su piano: due coordinate necessarie e sufficienti
  - Moto in spazio: tre coordinate necessarie e sufficienti
  - Moto in n-dimensioni: n coordinate necessarie e sufficienti!!!!
- # di coordinate fissato
  ma possibili ≠ tipi di coordinate equivalenti
  - Origine
  - Sistema di assi o direzioni
    - Unità di misura per ogni asse
  - Definizione per individuare **UNIVOCAMENTE**
    un punto qualunque dello spazio rispetto al sistema

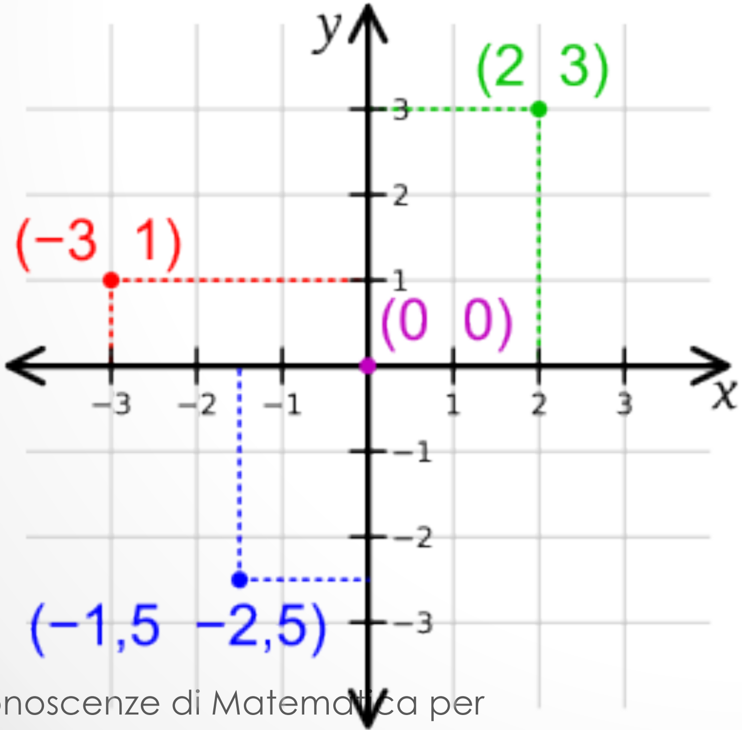
MET!

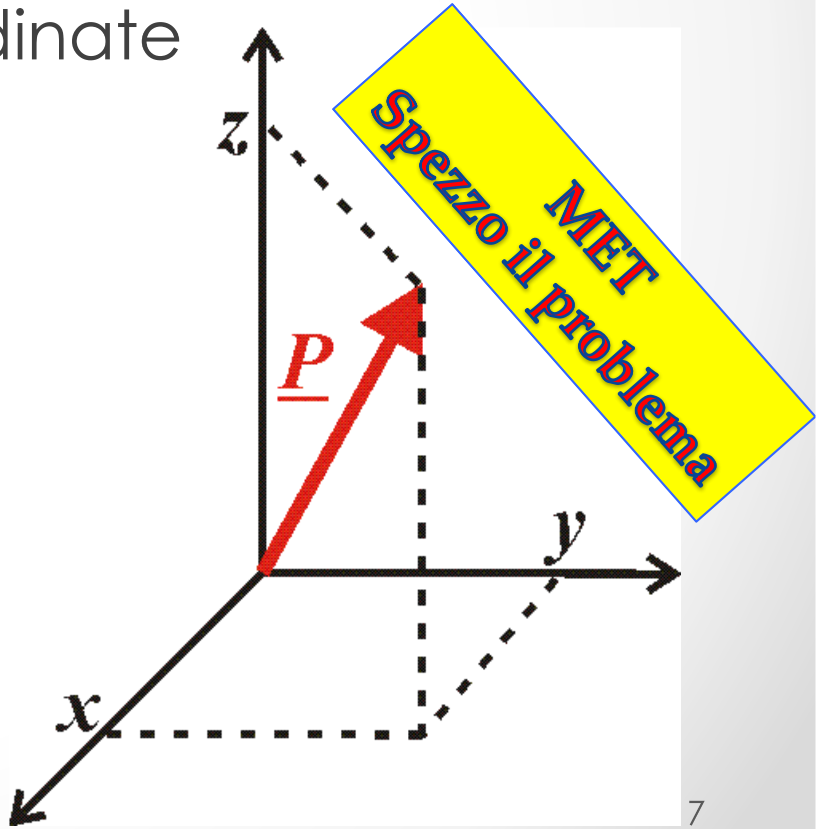
Sistemi di coordinate



Sistemi di coordinate
Coordinate cartesiane

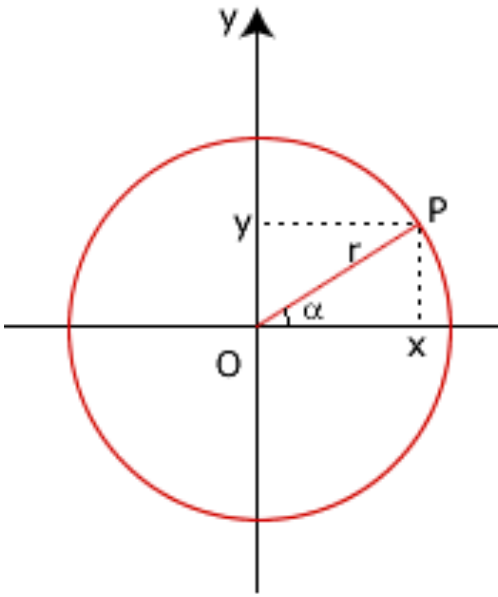
- Origine
- N assi
- Tracciare le parallele/perpendicolari agli assi passanti per il punto ➔ N coordinate

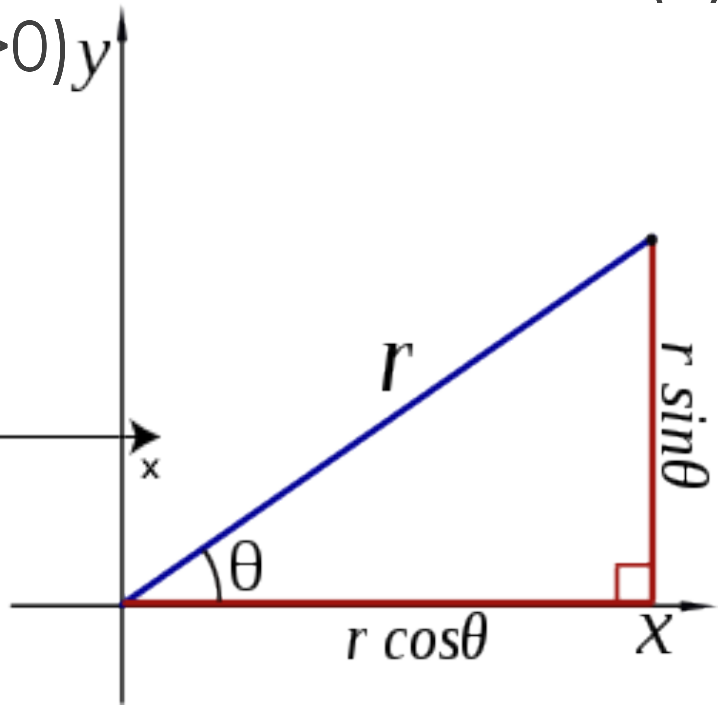


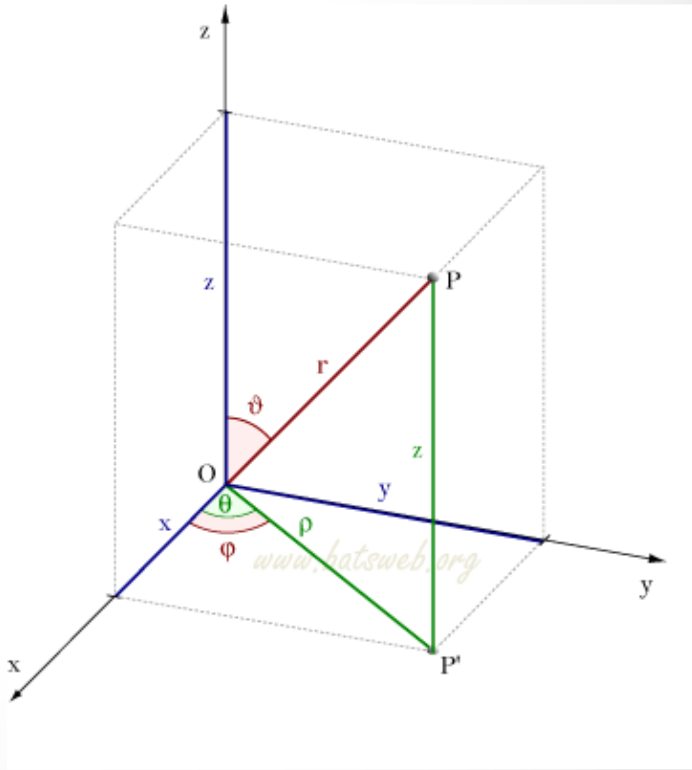


Sistemi di coordinate
Coordinate polari

- Origine
- 1 asse mobile e n assi fissi
- Distanza OP su asse mobile e 1(2) angoli (antiorario>0)

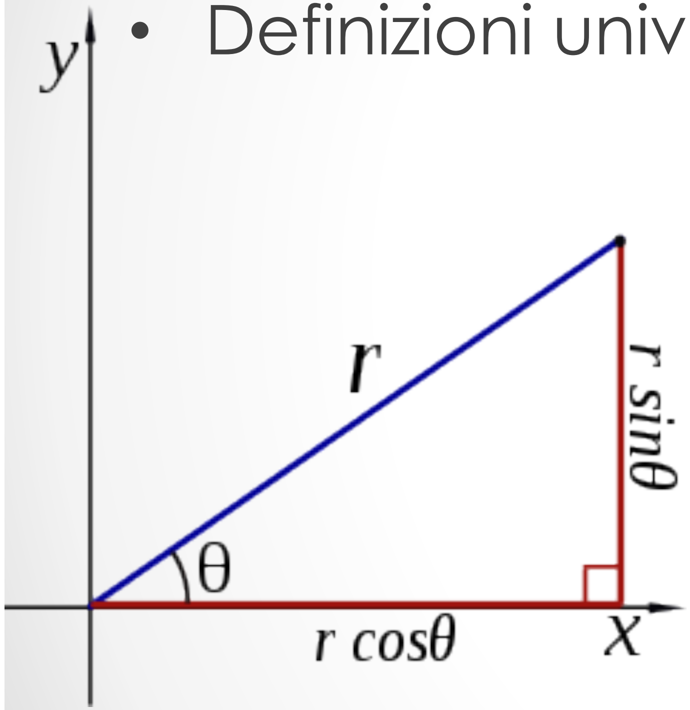


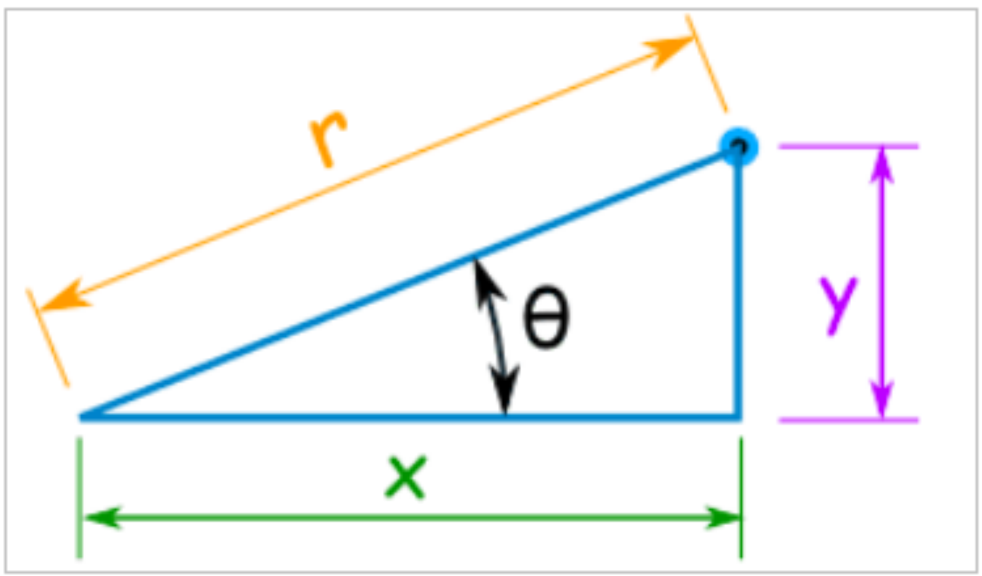




Conversione tra sistemi di coordinate

- Cartesiane ⇔ Polari
- Definizioni univoche, collegate ed invertibili



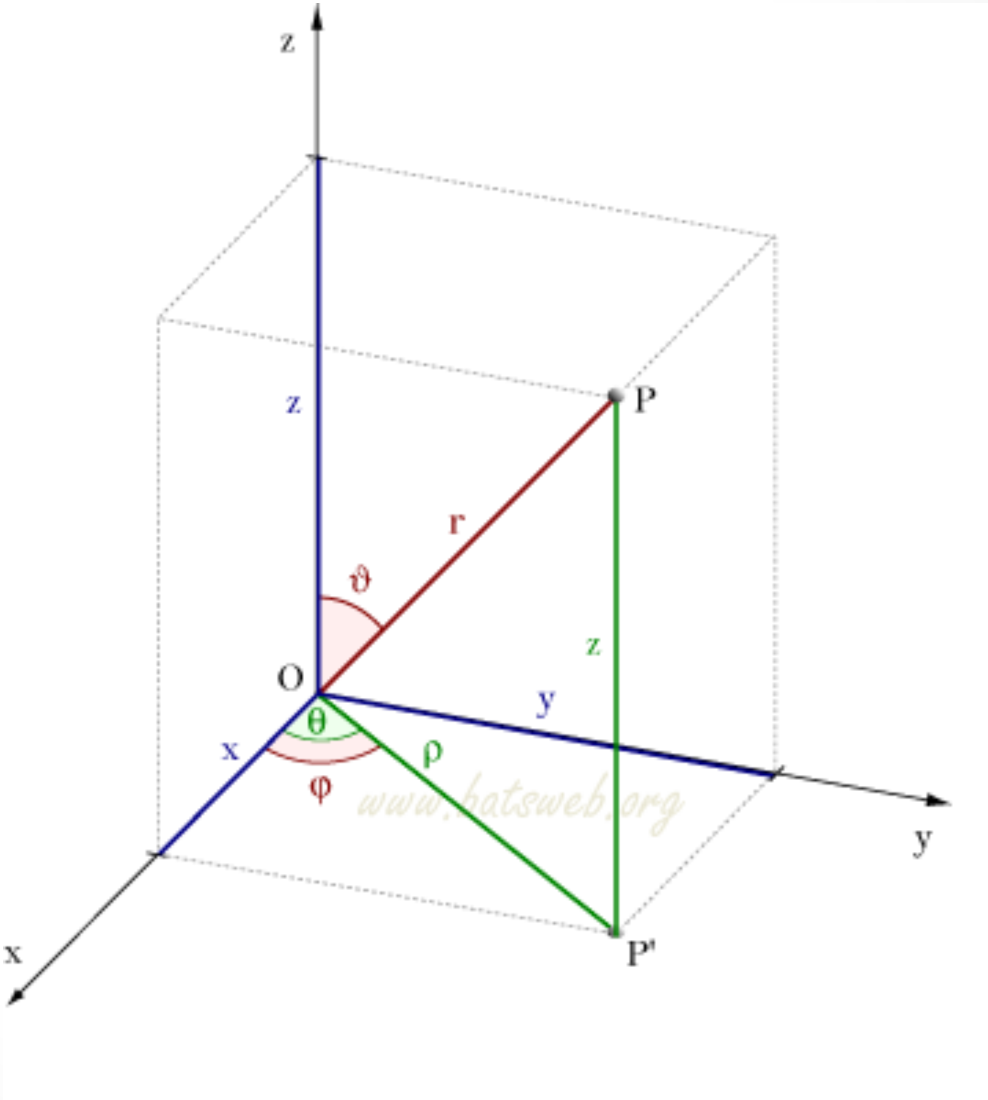


$$P \rightarrow C \qquad x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta$$

$$C \rightarrow P \qquad \tan\vartheta = \frac{y}{x} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Conversione tra sistemi di coordinate

- Estensione a 3D



Espressioni

- Operazioni elementari

$$+ \qquad -$$
$$* \qquad \div$$
$$(...)^n \qquad \sqrt[n]{...}$$
$$e^{...} \qquad \ln(...)$$
$$\sin(...) \qquad \arcsin(...)$$
$$\frac{d...}{dx} \qquad \int ...dx$$

- Espressioni elementari

k (cost)

x

x^2

x^n

e^x

$\ln(x)$

$\sin(x)$

$\arcsin(x)$

...

- Espressione complessa

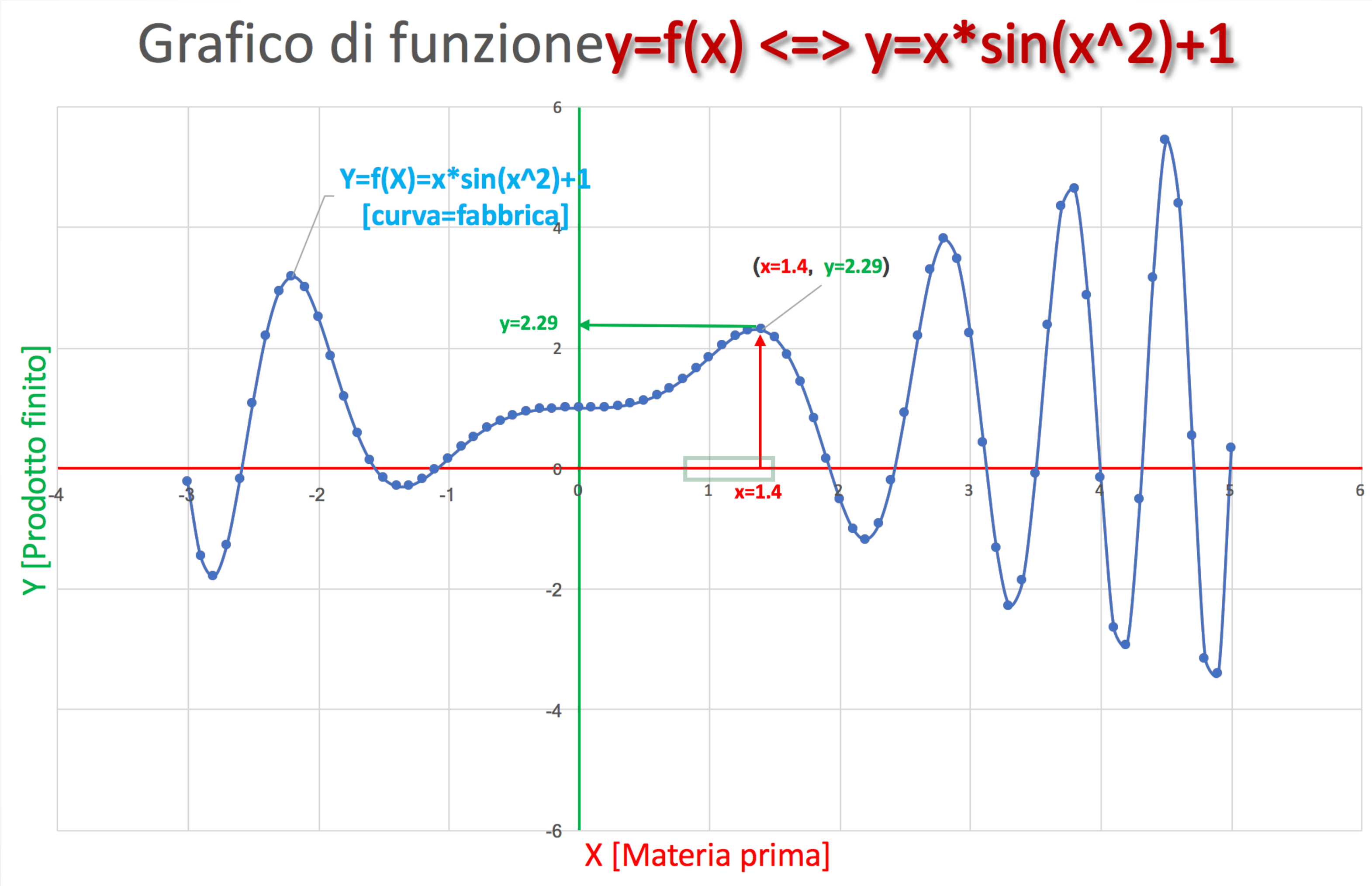
$$\frac{3x^2 + 4\sin(x) * e^{x^3}}{\ln_e(3 * x^{-3}) - 0.5}$$

MET: spezzare il problema

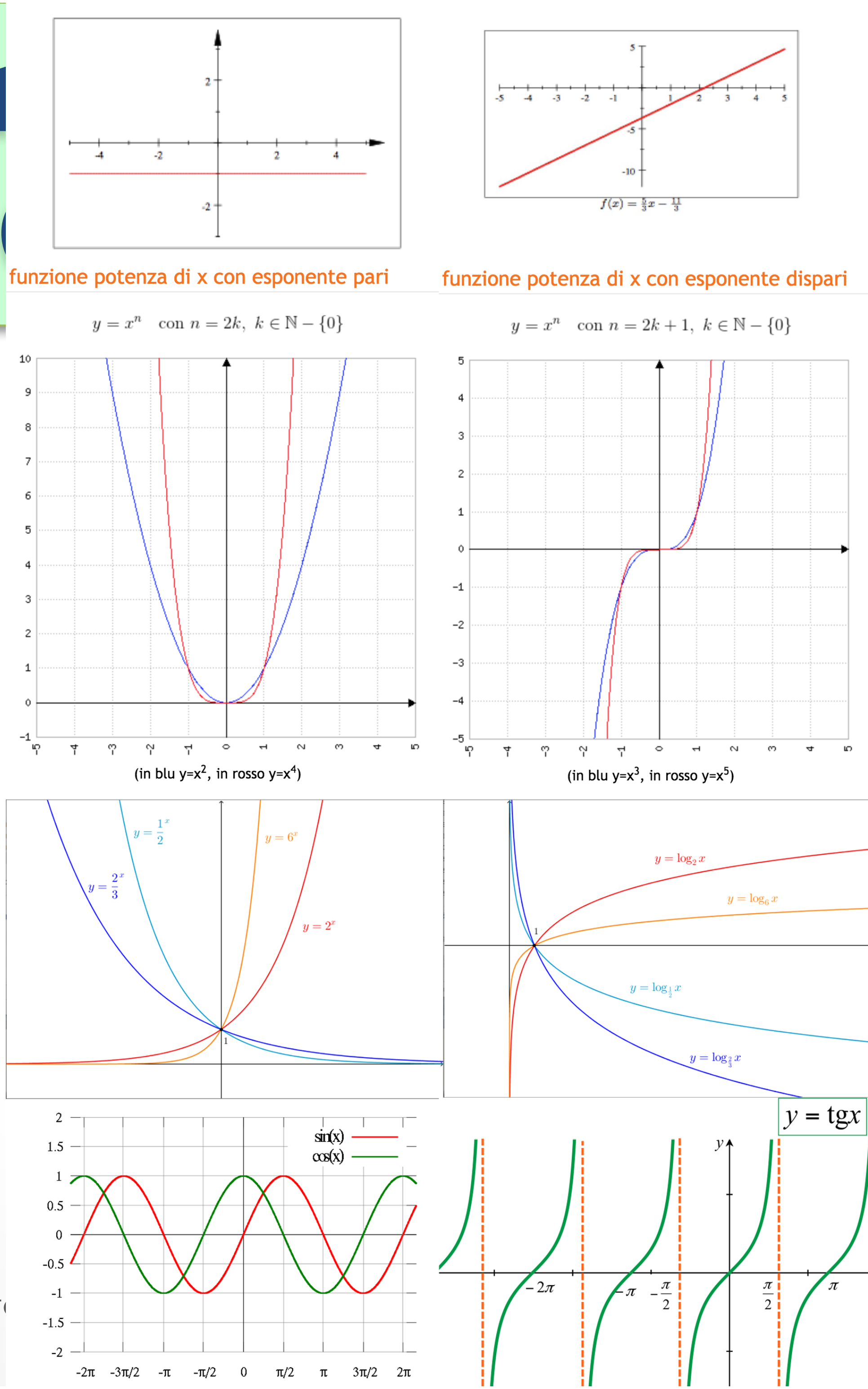
Funzioni ⇔ Curve

- Si consideri il piano XY
- Si individuino i punti del piano per mezzo di un sistema di riferimento cartesiano XY
- Per ogni curva che si può disegnare sul piano, esiste una funzione matematica che la descrive analiticamente

Funzioni ⇔ Curve

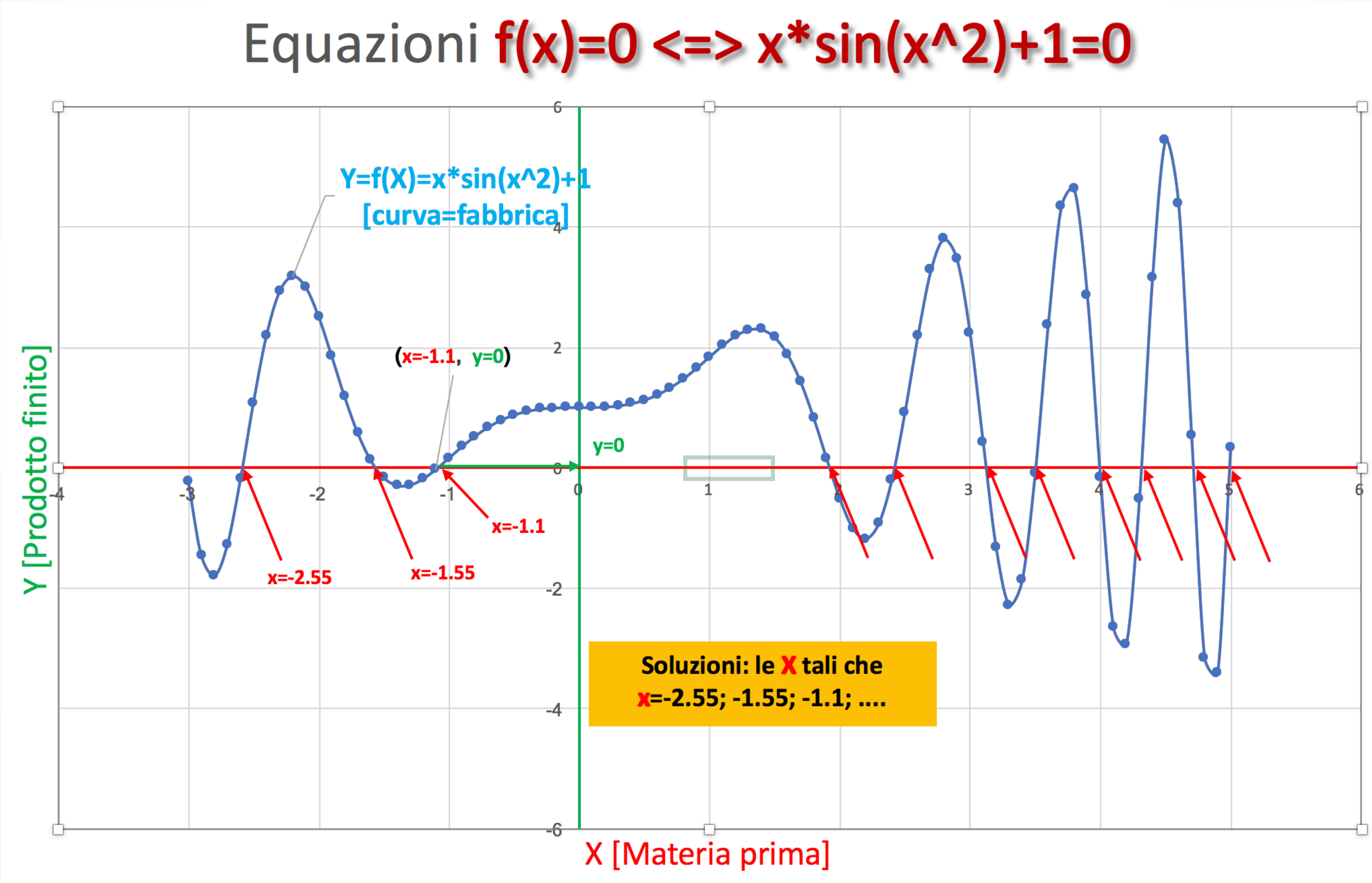


Fu… tari
⇔ (… tari



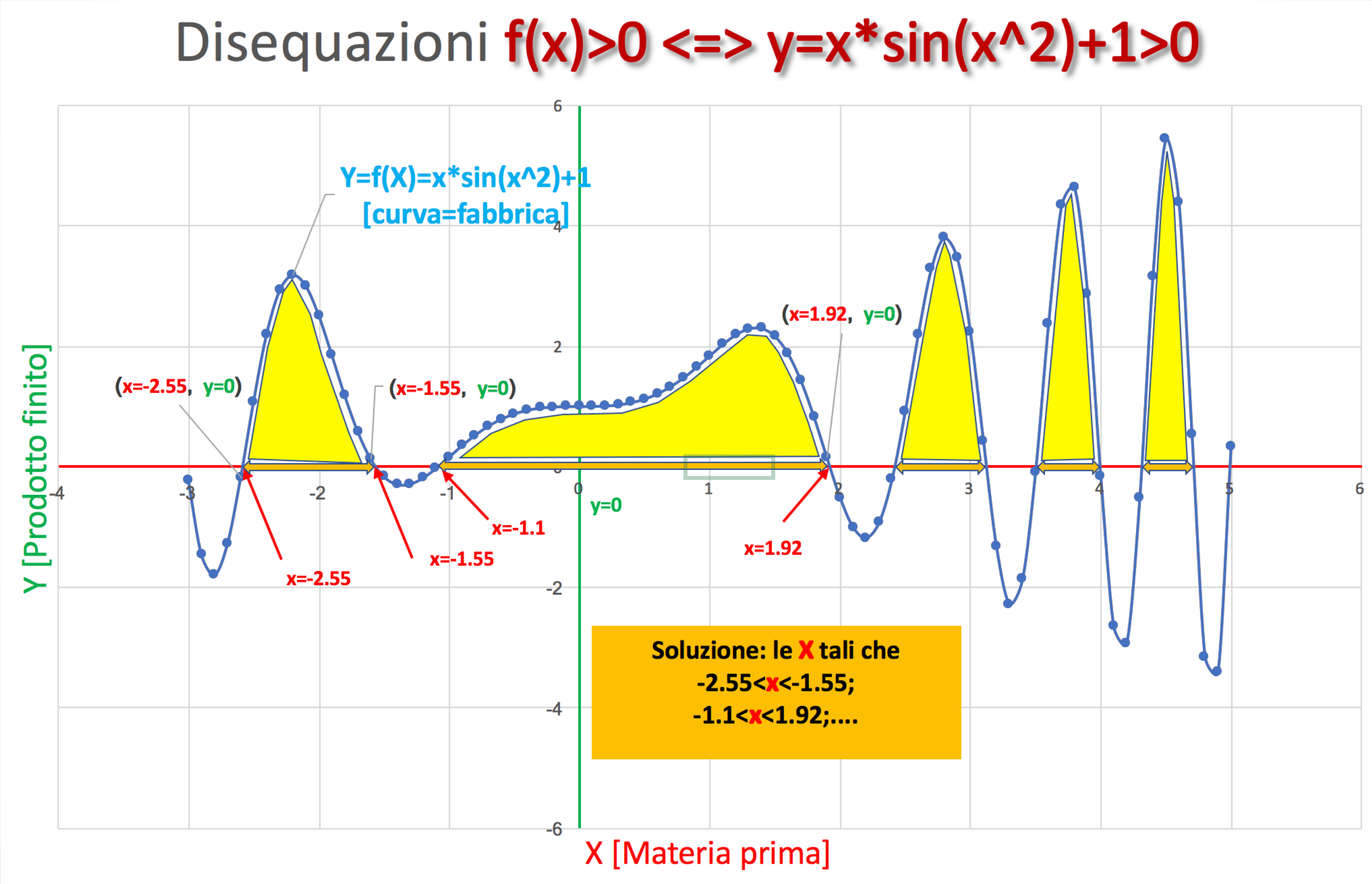
funzione potenza di x con esponente pari
funzione potenza di x con esponente dispari
$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$
$y = x^n \quad \text{con } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} - \{0\}$
$y = x^n \quad \text{con } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} - \{0\}$
(in blu y=x^2, in rosso y=x^4)
(in blu y=x^3, in rosso y=x^5)
$y = \frac{1}{2}^x$
$y = \frac{2}{3}^x$
$y = 6^x$
$y = 2^x$
$y = \log_2 x$
$y = \log_6 x$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$y = \log_{\frac{2}{3}} x$
sin(x)
cos(x)
-2π -3π/2 -π -π/2 0 π/2 π 3π/2 2π
$y = \mathrm{tg}x$

Equazioni

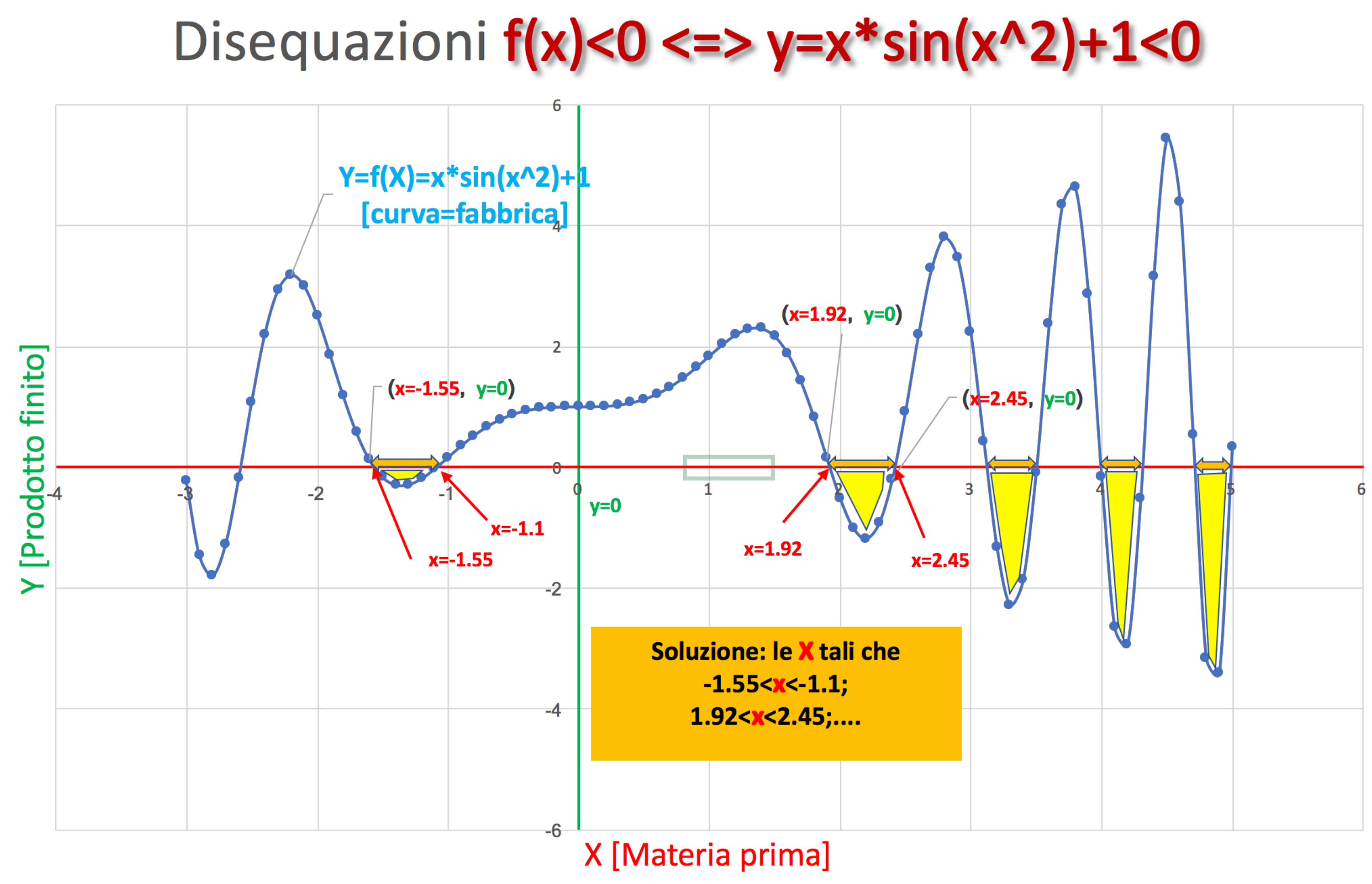


Equazioni f(x)=0 <=> x*sin(x^2)+1=0
Y=f(X)=x*sin(x^2)+1
[curva=fabbrica]
(x=-1.1, y=0)
y=0
x=-2.55
x=-1.55
x=-1.1
Soluzioni: le X tali che
x=-2.55; -1.55; -1.1; ....
Y [Prodotto finito]
X [Materia prima]
6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-3
-2
-1
0
1
3
4
5
6

Disequazioni >0

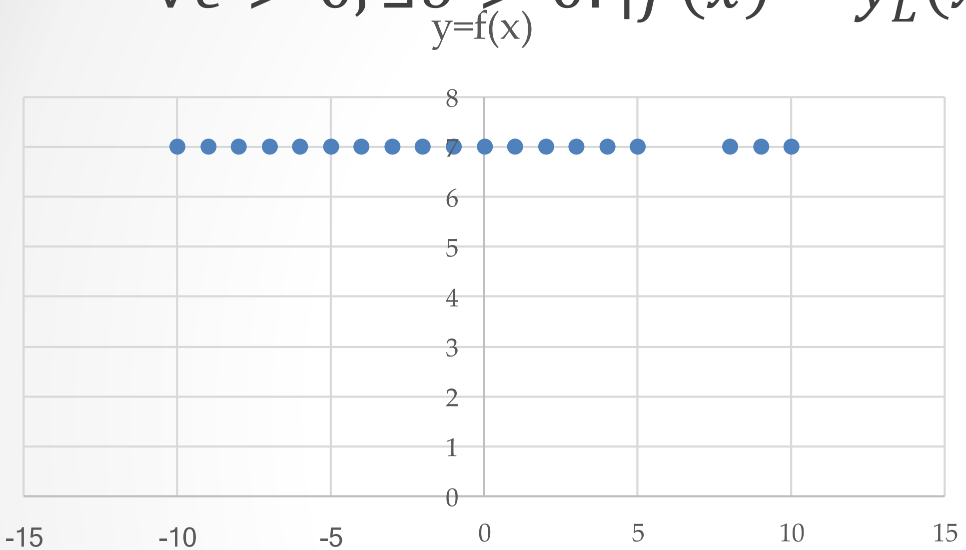


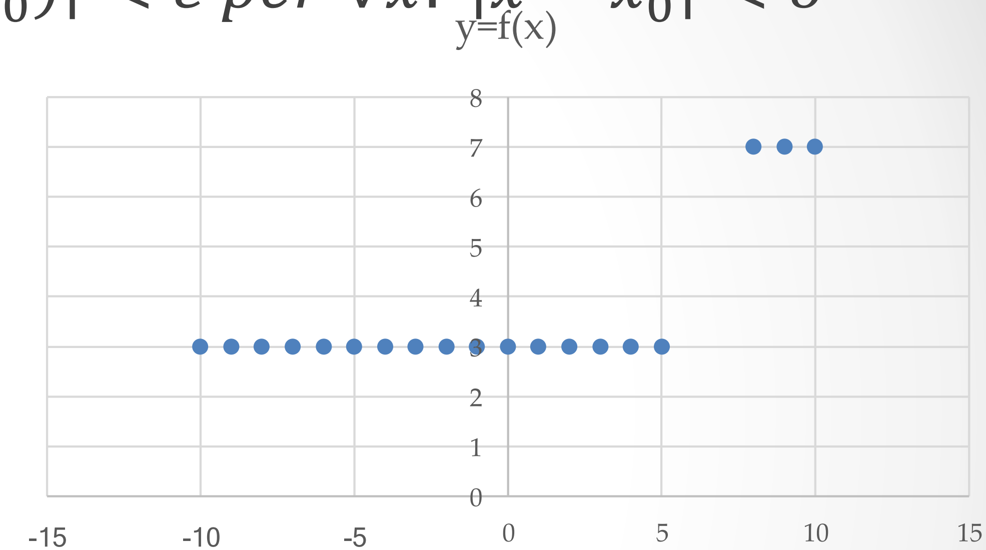
Disequazioni <0

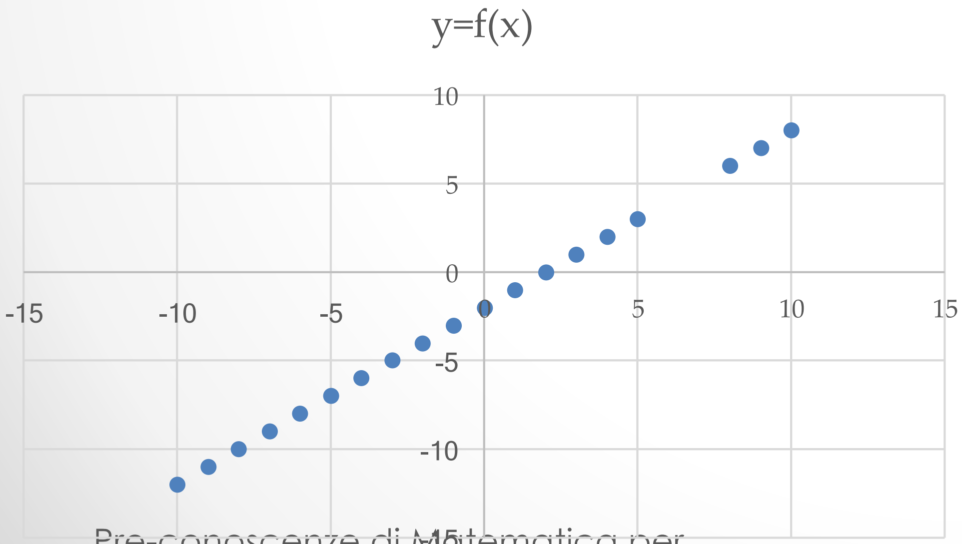


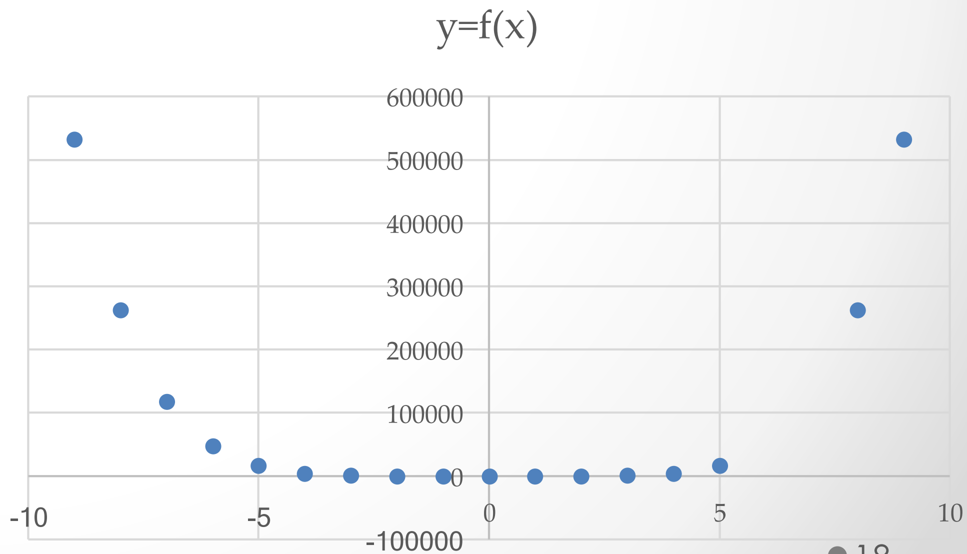
Limite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

- Data una funzione y=f(x), esiste il limite $L = y_L(x_0) \Leftrightarrow$
  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - y_L(x_0)| < \varepsilon \; per \; \forall x : |x - x_0| < \delta$



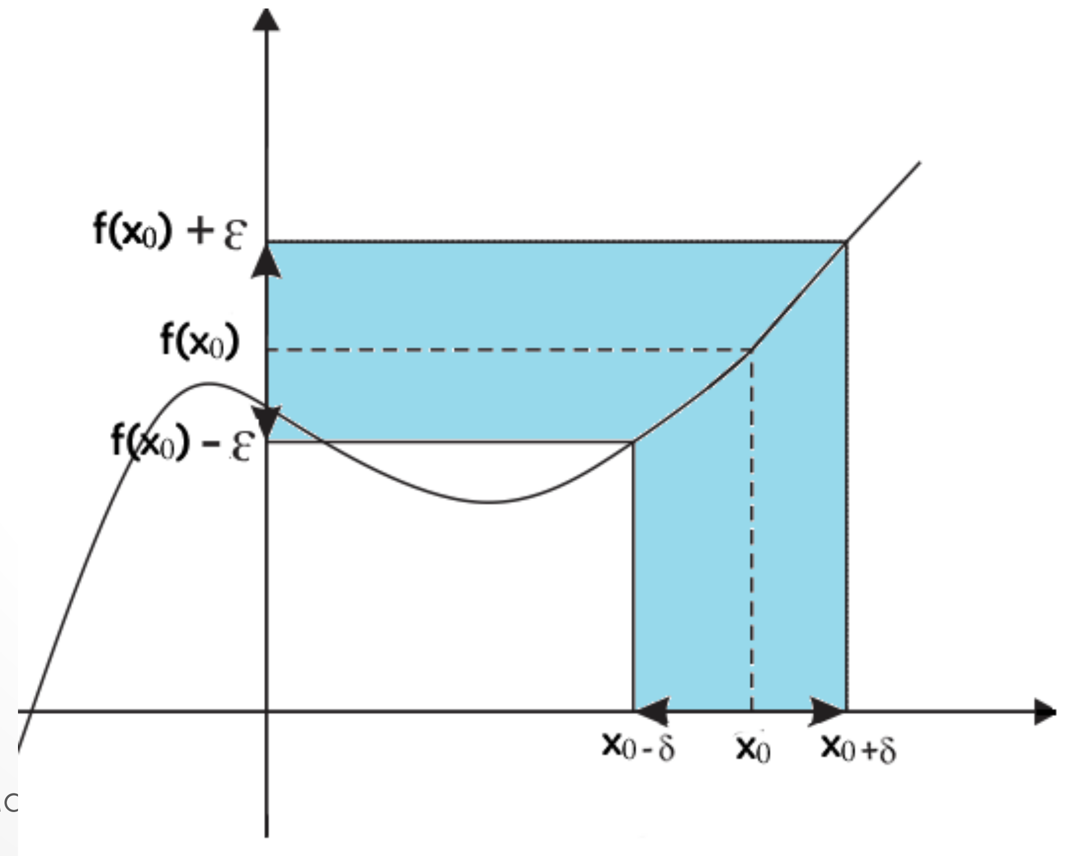






Limite $\quad L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

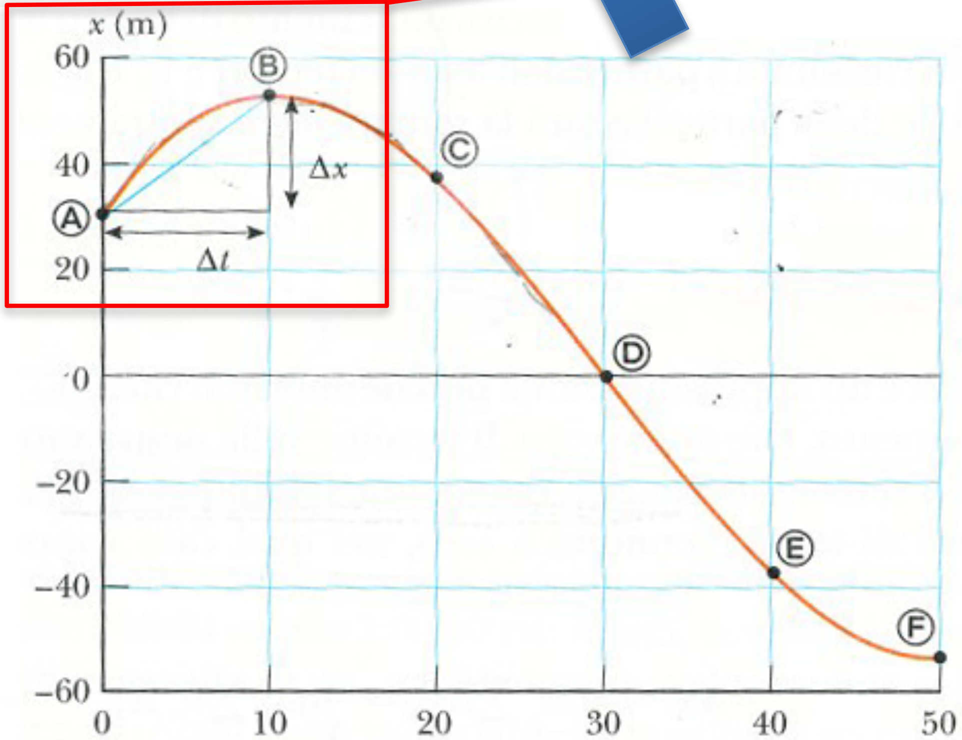
- Data una funzione y=f(x), esiste il limite $L = y_L(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |f(x) - y_L(x_0)| < \varepsilon \; per \; \forall x\colon \; |x - x_0| < \delta$

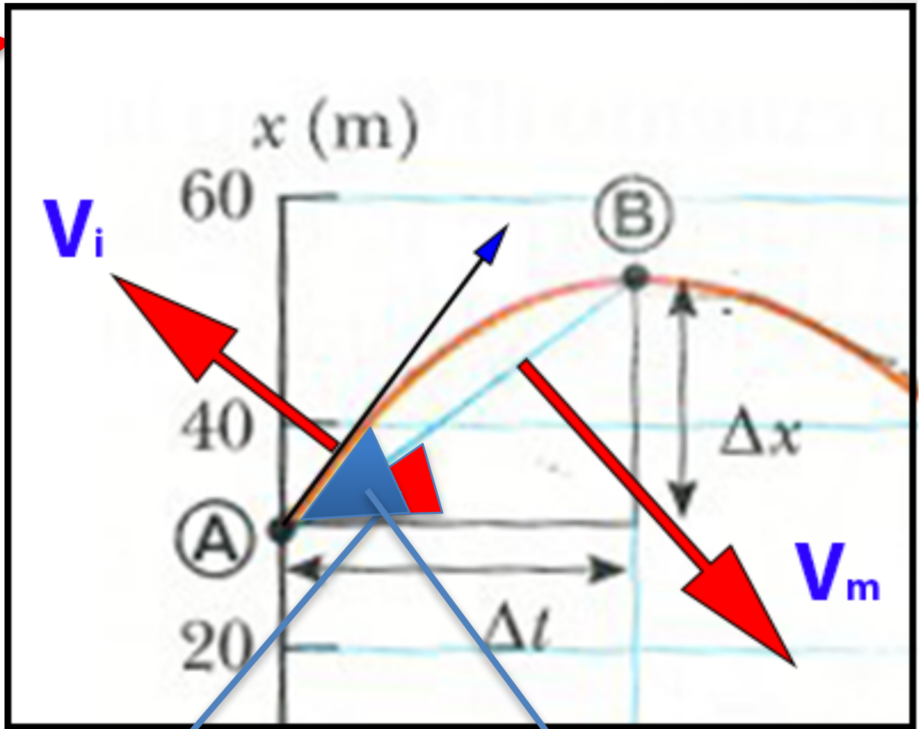


Significato geometrico derivata

$$f(t) = x(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}[x(t)] = x'(t) = D[x(t)]$$

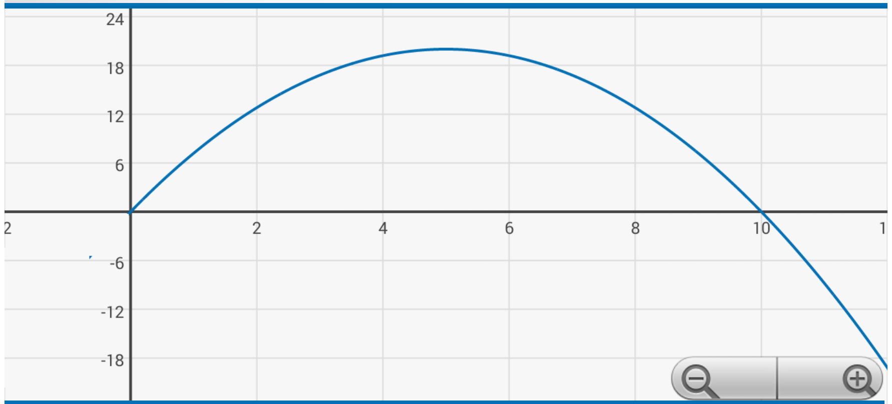
$$\frac{d}{dt}[x(t)] = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$



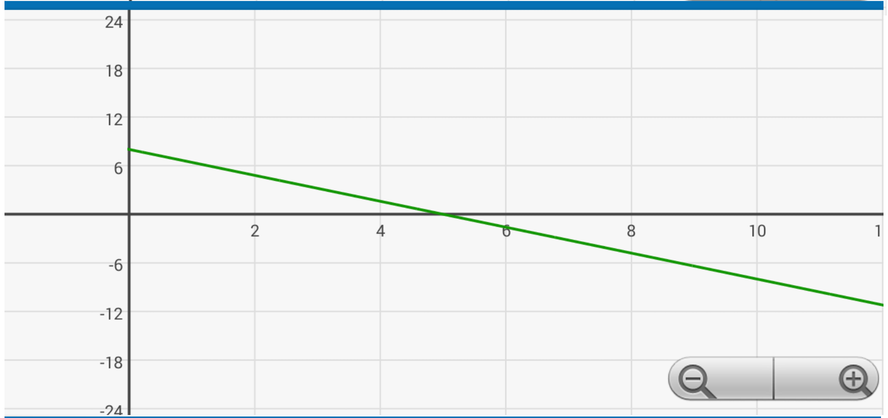


$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = tg(\alpha_{secante}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[x(t)] = tg(\vartheta_{tang})$$

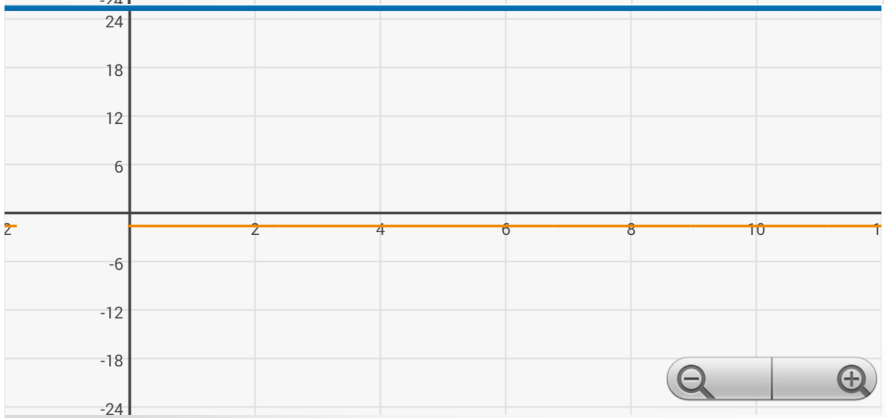
Derivata e derivate successive



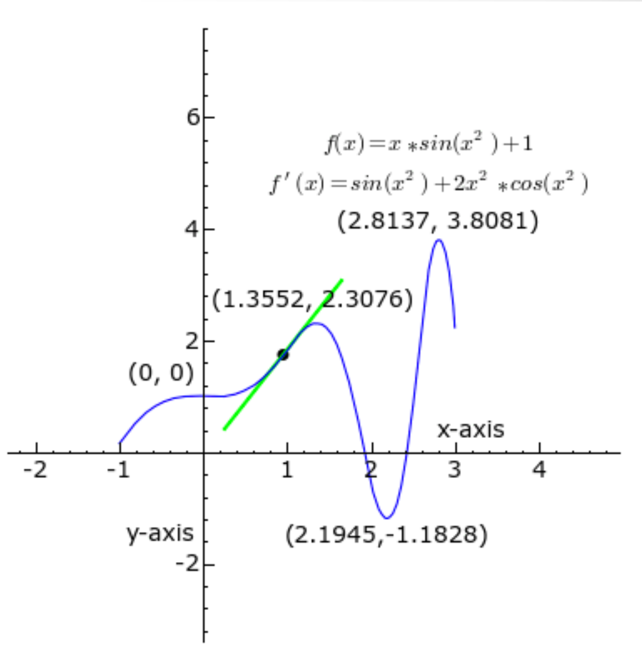
$$y = f(t) = -\frac{8}{10}t^2 + 8t$$

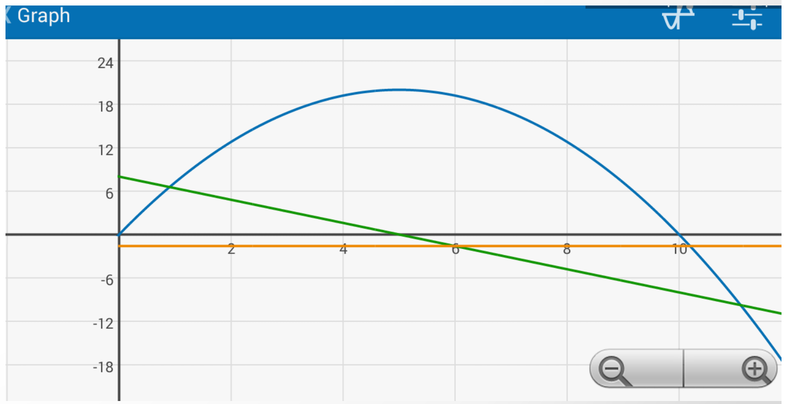


$$y' = \frac{d}{dt}\left[f(t)\right] = -\frac{16}{10}t + 8$$



$$y'' = \frac{d^2}{dt^2}\left[f(t)\right] = -\frac{16}{10}$$





Derivate notevoli
Teoremi livello -0-

- Operazioni elementari

$$A*(B \pm C) = (A*B) \pm (A*C)$$

$$(A*B)^n = A^n * B^n$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[y(x) \pm z(x)] = \frac{d}{dx}[y(x)] \pm \frac{d}{dx}[z(x)]}$$

$$\frac{d}{dx}[y(x)*z(x)] = \underbrace{\frac{d}{dx}[y(x)]*z(x)} + \underbrace{y(x)*\frac{d}{dx}[z(x)]}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{z(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[y(x)]*z(x) - y(x)*\frac{d}{dx}[z(x)]}{z^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}y[z(x)] = \frac{d}{dz}y(z)*\frac{d}{dx}z(x)} \Rightarrow \left[ex : \frac{d}{dx}(e^{3x^2})\right]$$

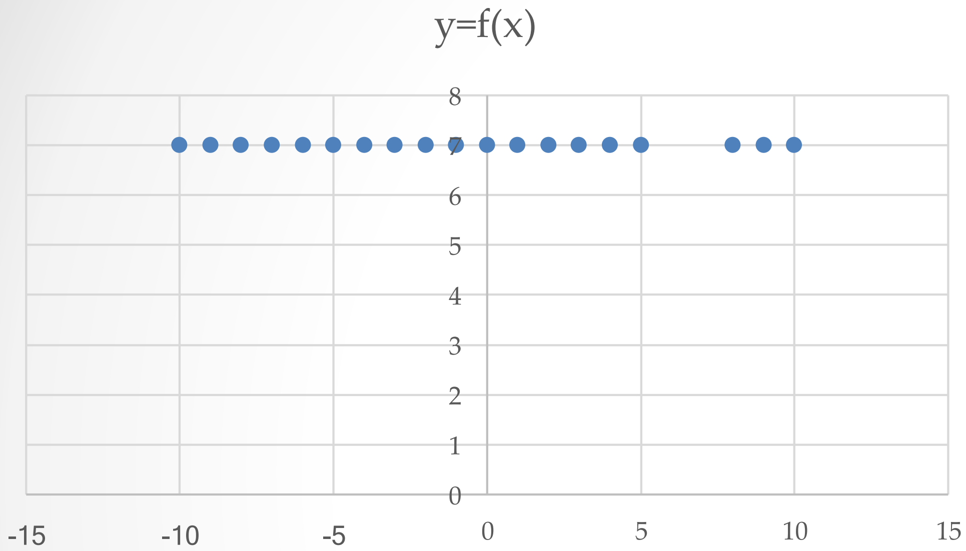
- Funzioni elementari

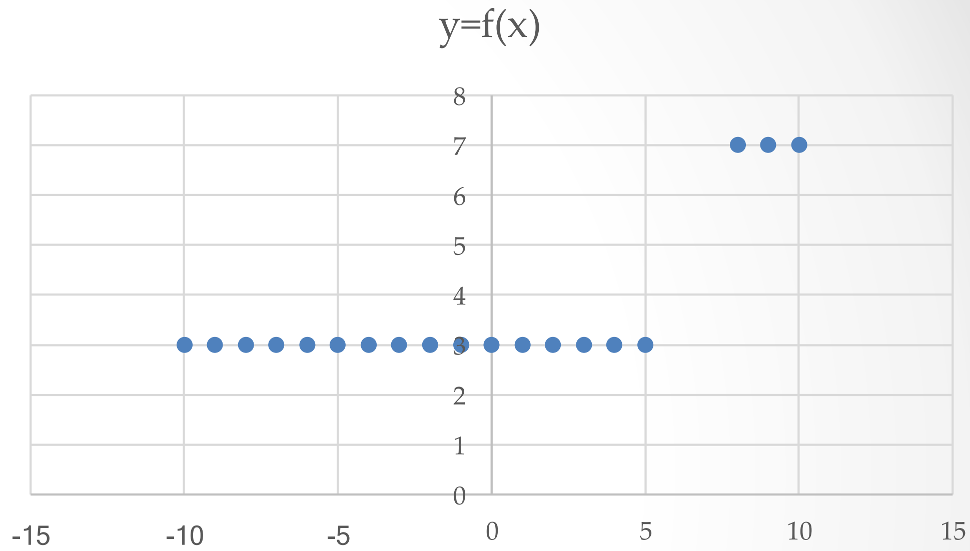
$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

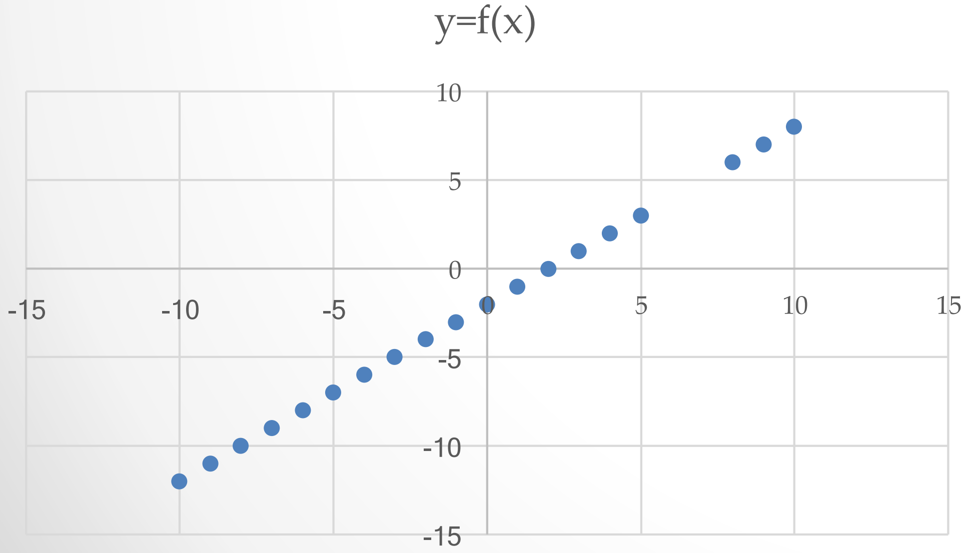
$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin x \qquad \cdots$$

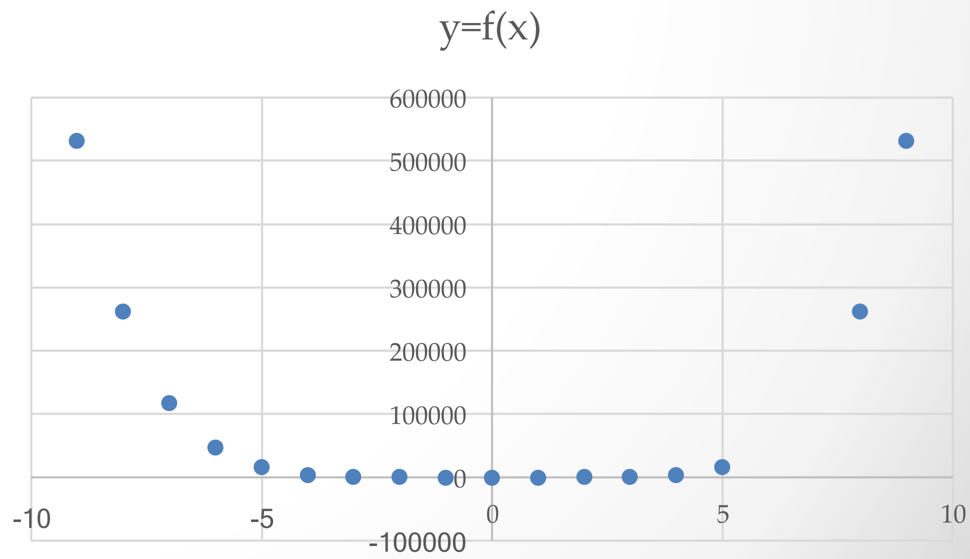
$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax} \qquad \frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x} \qquad \cdots$$

Integrali $\int f(x)dx$



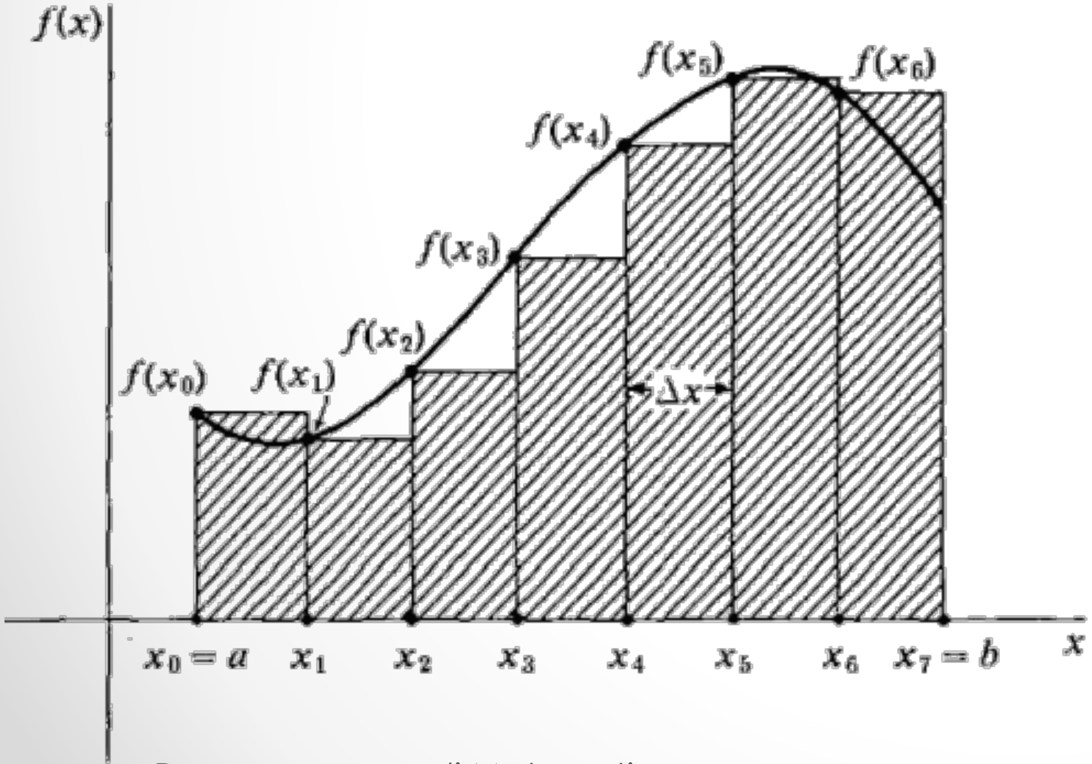






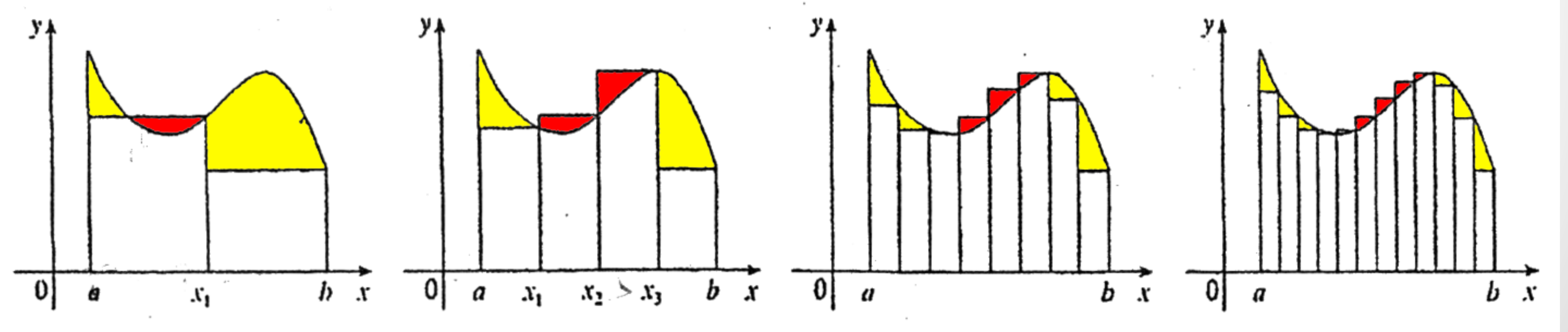
Integrali $\int f(x)dx$

- Area ➔ $A = \sum_n R_n = \sum_n [f(x_n) \cdot \Delta x_n]$



Integrali $\int f(x)dx$

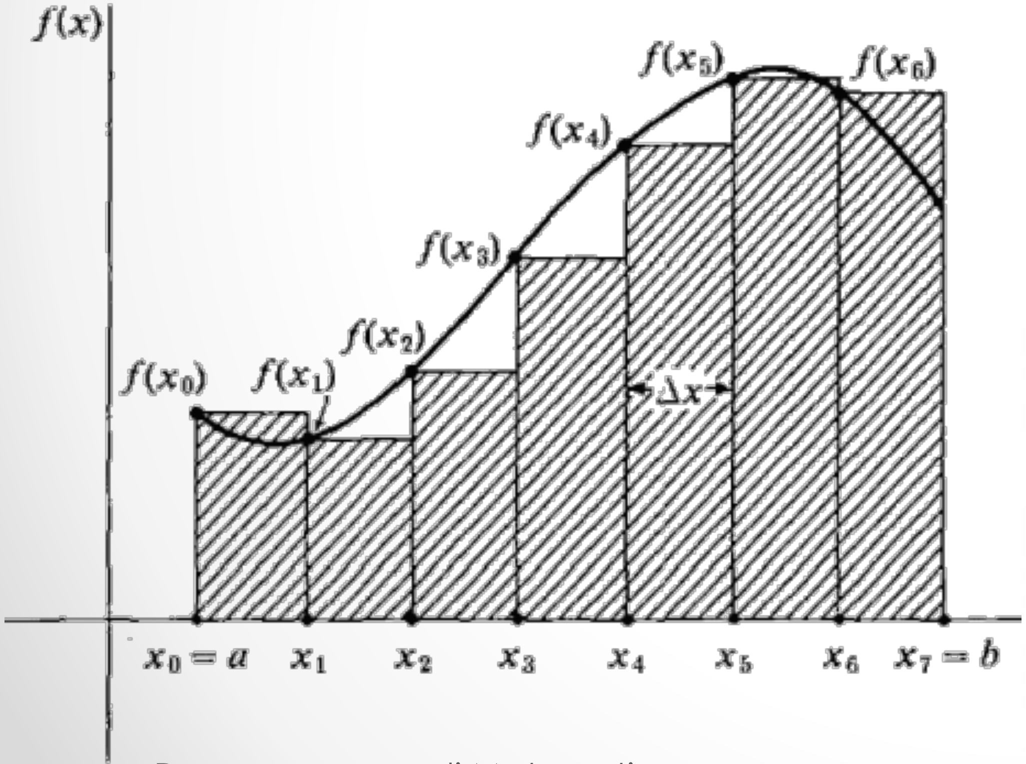
- Area ➔ $A = \sum_n R_n = \sum_n [f(x_n) \cdot \Delta x_n]$
- ➔ $\lim_{\Delta x \to 0/n \to \infty} [\sum_i f(x_n) \cdot \Delta x_n] = F(x) = \int f(x)dx$

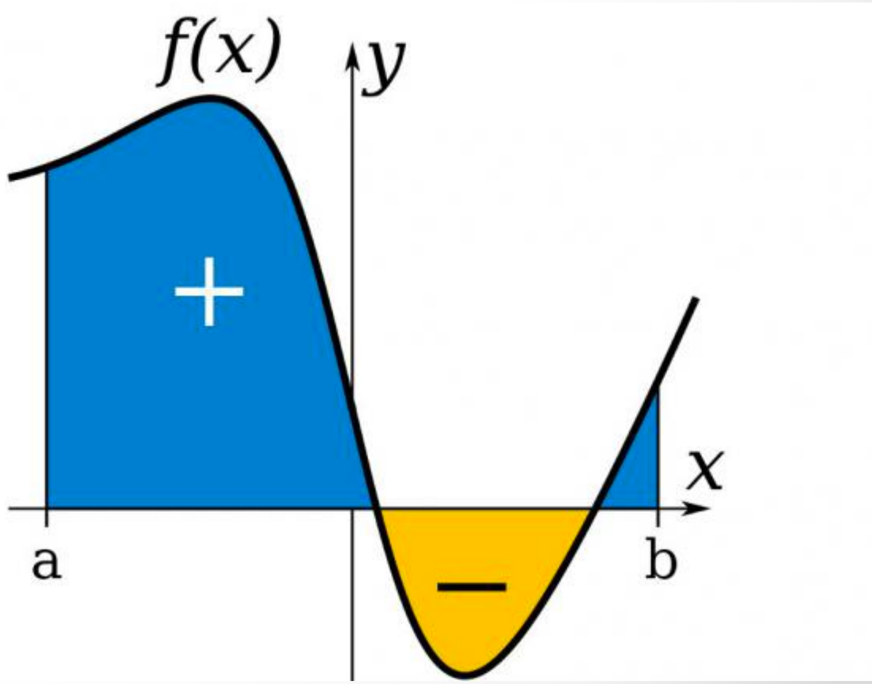


(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

Integrali $\int f(x)dx$

- Area ➔ $A = \sum_n R_n = \sum_n [f(x_n) \cdot \Delta x_n]$
- ➔ $\lim_{\Delta x \to 0 / n \to \infty} [\sum_i f(x_n) \cdot \Delta x_n] \;=\; F(x) = \int f(x)dx$



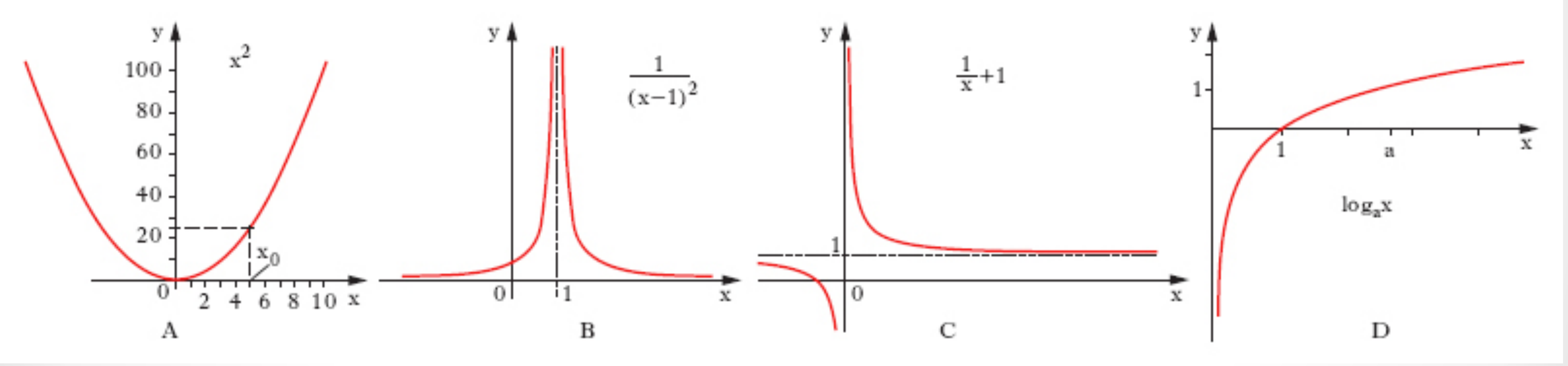


Funzioni – Limiti Derivate - Integrali

- **Concetto geometrico/Definizione analitica di:**
  - **Limite**
  - **Derivata⇔Futuro** (usa limite)
  - **Integrale⇔passato** (usa limite)

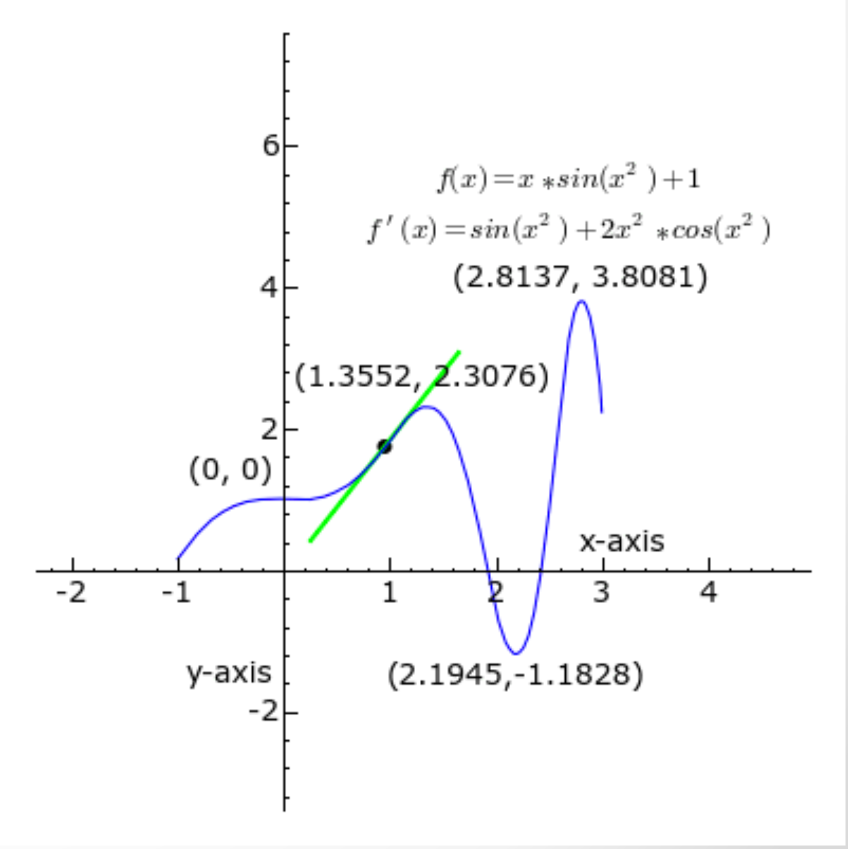
Funzioni – Limiti Derivate - Integrali

- **Concetto geometrico/Definizione analitica di:**
  - **Limite**
    - Significato geometrico: serve per stimare cosa succede ad una funzione in un punto qualunque
      - Funziona sempre, anche dove la funzione non è definita
    - ➔ definizione analitica: $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$



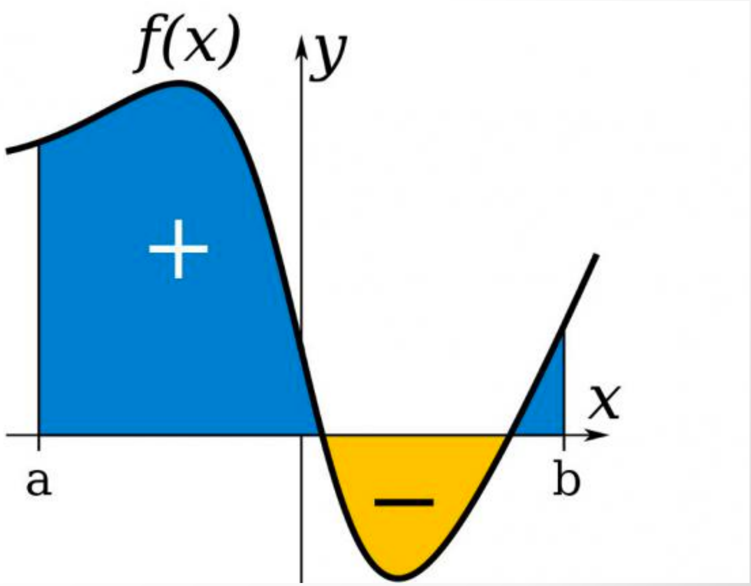
Funzioni – Limiti Derivate - Integrali

- **Concetto geometrico/Definizione analitica di:**
  - **Limite**
    - Significato geometrico: serve per stimare cosa succede ad una funzione in un punto qualunque
      - Funziona sempre, anche dove la funzione non è definita
    - ➔ definizione analitica: $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$
  - **Derivata⇔Futuro** (usa limite)
    - Significato geometrico: velocità di variazione di una funzione (pendenza = $tg\vartheta$)
    - ➔ definizione analitica: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$



Funzioni – Limiti Derivate - Integrali

- **Concetto geometrico/Definizione analitica di:**
  - **Limite**
    - Significato geometrico: serve per stimare cosa succede ad una funzione in un punto qualunque
      - Funziona sempre, anche dove la funzione non è definita
    - ➔ definizione analitica: $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$
  - **Derivata⇔Futuro** (usa limite)
    - Significato geometrico: velocità di variazione di una funzione (pendenza = $tg\vartheta$)
    - ➔ definizione analitica: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$
  - **Integrale⇔passato** (usa limite)
    - Significato geometrico: area sottesa da una funzione
    - ➔ definizione analitica: $F(x) = \int f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} [\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x_i]$
    -



Funzioni – Limiti Derivate - Integrali

- **Concetto geometrico/Definizione analitica di:**
  - **Limite**
    - Significato geometrico: serve per stimare cosa succede ad una funzione in un punto qualunque
      - Funziona sempre, anche dove la funzione non è definita
    - ➔ definizione analitica: $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$
  - **Derivata⇔Futuro** (usa limite)
    - Significato geometrico: velocità di variazione di una funzione (pendenza = $tg\vartheta$)
    - ➔ definizione analitica: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$
  - **Integrale⇔passato** (usa limite)
    - Significato geometrico: area sottesa da una funzione
    - ➔ definizione analitica: $F(x) = \int f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} [\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x_i]$

- **Organizzazione argomenti:**
  - **Limite**
    - Definizione
    - Teoremi di livello 0 (con definizione)
    - Teoremi di livello 1 (con teoremi di livello 0)
  - **Derivata** (operazione inversa integrale)
    - Definizione
    - Teoremi di livello 0 (con definizione)
    - Teoremi di livello 1 (con teoremi di livello 0)
  - **Integrale** (operazione inversa derivata)
    - Definizione
    - Teoremi di livello 0 (con definizione)
    - Teoremi di livello 1 (con teoremi di livello 0)
  - ***Proprietà simili e differenti: derivata e integrale di un prodotto***

Sviluppo calcoli

- Usare formule letterali e variabili
- Sostituire i numeri solo alla fine
- Vantaggi:
  - Le formule letterali sono leggibili e comprensibili
  - È più facile accorgersi di errori
  - Possibilità di semplificazioni